Thématique(s) de la semaine

AL07 - Travailler dans les espaces usuels de dimension finie

- Notion d'espace vectoriel : extension du cas $\mathbb{R}^n$ à $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.
- Sous-espace vectoriel
- Combinaison linéaire de vecteurs
- Famille libre
- Famille génératrice
- Base d'un espace vectoriel
- Représentation matricielle d'un vecteur dans une base

Exemples de savoir faire à maîtriser

- Reprise programme précédent
- Montrer qu'un sous-ensemble est un sous-espace vectoriel
- Montrer qu'un vecteur est combinaison linéaire d'éléments d'une famille de vecteurs
- Montrer qu'une famille est une famille libre en utilisant la définition
- Montrer qu'une famille est une famille génératrice en utilisant la définition

Programme à venir...

Espaces vectoriels | Dimension finie

Pour se préparer

EX. 1 | Réf. 1406

Soit $F = \left\{ M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}),\, \exists\,(a,b,c) \in \mathbb{R}^3, M = \begin{pmatrix} a & b & a+b \\ b & c & a \\ c & a & a+c \end{pmatrix} \right\}$.

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

EX. 2 | Réf. 1427

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

Le sous-ensemble F de E défini par : $F = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P(0) = P(2)\}$ est-il un sous-espace vectoriel de E ?

EX. 3 | Réf. 1192

Soit $F = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; \exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} x = 2\alpha - 5\beta \\ y = -\alpha + 3\beta \\ z = 7\beta \end{cases} \right\}$.

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

EX. 4 | Réf. 1408

Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, et soit G le sous-ensemble de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ défini par :

$$G = \{C \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}),\ AC = CA = 0\}$$

Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

EX. 5 | Réf. 1436

Soit (u,v,w) une famille libre d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E.

1. Montrer que la famille $(u+v, u-v, w+u)$ est également libre.
2. La famille $(u-v, v-w, w-u)$ est-elle libre ?

EX. 6 | Réf. 0396

Soient u, v, w trois vecteurs linéairement indépendants d'un espace vectoriel E. Montrer que $u+v$, $u-v$ et $u-2v+w$ sont aussi indépendants.

EX. 7 | Réf. 1425

Montrer que $F = \{P \in \mathbb{R}[X],\, 5P - (X-1)P' = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

EX. 8 | Réf. 2395

Soit $F = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P = XP' + P(0)\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

EX. 9 | Réf. 4894

On considère le sous-ensemble F de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ donné par :

$$F = \left\{ M\,(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix},\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de F.
2. Donner une famille génératrice de F.
3. En déduire une base de F.