Question de cours | Restitution de cours | Situation classique | 5 minutes | 2 points

Les énoncés ci-contre pourront vous être demandés explicitement avec toutes leurs hypothèses, avec ou sans démonstration:

- AL18 - Théorèmes 2 et 3 - Expression du projeté orthogonal dans une base orthonormée du sous-espace Propriétés « géométriques » d'une projection orthogonale | Schémas compris
- AL17 - Théorème 2 et 3 - Décomposition d'un vecteur dans une base orthonormée | Produit scalaire et norme en base orthonormée
- AL16 - Théorème 2 et 3 - Théorème de Pythagore pour deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ | Théorème de Pythagore pour une famille de $p \geq 3$ vecteurs de $\mathbb{R}^n$

Pratique calculatoire | 20 minutes | 8 points

Calculer les dérivées partielles premières et secondes d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

et

Déterminer les extremums d'une forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$

Thématique(s) de la semaine

AL16 | Produit scalaire et orthogonalité dans $\mathbb{R}^n$

- Produit scalaire et norme associée
- Inégalité de Cauchy-Schwarz
- Identités remarquables, de polarisation et du parallélogramme
- Distance euclidienne dans $\mathbb{R}^n$
- Vecteurs orthogonaux
- Théorème de Pythagore
- Liberté d'une famille de vecteurs orthogonaux
- Vecteur orthogonal à un sous-espace
- Sous-espace orthogonaux et orthogonal d'un sous-espace

AL17 | Bases orthonormées de $\mathbb{R}^n$

- Coordonnées d'un vecteur dans un base orthonormée
- Expression de la norme et du produit scalaire en base orthonormée
- Exemple de construction de bases orthonormées
- Existence de base orthonomée et complétion d'une famille orthonormée
- Écriture matricielle d'un produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$.

AL18 | Supplémentaire orthogonal et projection orthogonale

- Supplémentaire orthogonal
- Supplémentaire orthogonal d'une droite vectorielle
- Projection orthogonale sur un sous-espace
- Expression du projeté orthogonal dans une base orthonormée du sous-espace
- Distance d'un vecteur à un sous-espace

AN15 | Généralités sur les fonctions de deux variables

- Graphe et de lignes de niveau pour $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ | Cas particulier des formes linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$
- Dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2
- Notion de partie ouverte de $\mathbb{R}^2$ | Culturel
- Notion de classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathcal{C}^2$ | Culturel
- Théorème de Schwarz

AN16 | Extremum d'une fonction de deux variables

- Notion de point critique
- Lien point critique et extremum
- Extremum des fonctions quadratiques
- Extremum d'une fonction de $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ à partir de ceux d'une forme quadratique

Exemples de savoir faire à maîtriser

- Effectuer un produit scalaire ou calculer une norme
- Utiliser la bilinéarité du produit scalaire
- Montrer que deux vecteurs sont orthogonaux
- Montrer qu'un vecteur appartient à l'orthogonal d'un sous-espace
- Déterminer une base de l'orthogonal d'un sous-espace
- Construire une famille orthonormée à partir de deux ou trois vecteurs
- Déterminer la projection orthogonale d'un vecteur sur un sous-espace
- Calculer la distance d'un vecteur à un sous-espace
- Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2 pour $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
- Déterminer les extremums d'une forme quadratique

Programme à venir...

Reprise programme + Extremum de fonctions de deux variables

Pour la pratique calculatoire

EX. 1 | Réf. 1561

On considère la fonction de deux variables f donnée par : $f : \left| \begin{array}{rcl} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{x-2y}{x-y} \end{array} \right.$

où $U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x-y \neq 0\right\}$.
Déterminer une expression des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f sur U.

EX. 2 | Réf. 1562

On considère la fonction de deux variables f donnée par : $f : \left| \begin{array}{rcl} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{x+3y}{x-y} \end{array} \right.$

où $U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x-y \neq 0\right\}$.
Déterminer une expression des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f sur U.

EX. 3 | Réf. 3236

Pour chacune des formes quadratiques suivantes, identifier les éventuels extrema :

1. $f_1 : (x,y) \longmapsto -x^2 + 2xy - y^2$
2. $f_2 : (x,y) \longmapsto -x^2 + 4xy + 4y^2$
3. $f_3 : (x,y) \longmapsto 4x^2 - 2xy - y^2$
4. $f_4 : (x,y) \longmapsto -2x^2 + 2xy - y^2$

EX. 4 | Réf. 3237

Pour chacune des formes quadratiques suivantes, identifier les éventuels extrema :

1. $f_1 : (x,y) \longmapsto x^2 + 2xy - y^2$
2. $f_2 : (x,y) \longmapsto -x^2 - 4xy + 2y^2$
3. $f_3 : (x,y) \longmapsto -x^2 - 3xy + y^2$
4. $f_4 : (x,y) \longmapsto -2x^2 - xy - y^2$

Sur l'ensemble du programme

EX. 5 | Réf. 3302

On munit $\mathbb{R}^4$ de son produit scalaire canonique.

1. Montrer que la famille $\mathcal{B} = \{(1,1,0,-1), (-2,1,1,-1), (0,1,0,1)\}$ est une famille orthogonale de vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

2. On considère $F = \text{Vect}((1,1,0,-1), (-2,1,1,-1), (0,1,0,1))$.

a. Déterminer une base orthonormée $\mathcal{B}_0$ de F.

b. En déduire le projeté orthogonal du vecteur $u = (1,2,-1,0)$ sur F.

EX. 6 | Réf. 3300

On munit $\mathbb{R}^4$ de son produit scalaire usuel, et on considère les vecteurs $v_1 = (0,3,1,-1)$ et $v_2 = (1,2,-1,1)$.
On note $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$.
Déterminer un système d'équations de $F^\perp$ puis une base orthonormée de $F^\perp$.

EX. 7 | Réf. 1451

On se place dans $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique. On pose $u_1 = (1,0,0,-1)$ et $u_2 = (-1,-1,1,1)$.

1. Déterminer une base orthonormale du sous-espace vectoriel $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$.

2. Déterminer une base orthonormale de $F^\perp$.

3. **a.** En déduire une base orthonormale $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$, autre que la base canonique.

b. Déterminer dans la base $\mathcal{B}$ les composantes de $v = (1,2,-1,-1)$ et de $p_F(v)$ où p_F est la projection orthogonale sur F.

EX. 8 | Réf. 1453

On considère $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique.

1. Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur le plan vectoriel P où :

$$P = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 2y - 3z = 0\right\}$$

2. En déduire la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à P.

3. Calculer ensuite $\mathrm{d}((1,4,-2), P)$.

EX. 9 | Réf. 3653

Dans cet exercice, n désignera un entier naturel supérieur ou égal à 3.
On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique que l'on note $\langle x, y\rangle$ où $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.
On considère deux vecteurs a et b de $\mathbb{R}^n$ tels que la famille (a,b) est une famille orthonormale de $\mathbb{R}^n$.
On définit alors sur $\mathbb{R}^n$ l'application f par : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ x & \longmapsto & \langle a, x\rangle b - \langle b, x\rangle a \end{array} \right.$

1. Vérifier que f est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

2. Déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$. Donner une base de $\text{Im}(f)$.

3. Montrer que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad \langle f(x), y\rangle = -\langle x, f(y)\rangle$.

EX. 10 | Réf. 1592

Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer que : $\left(\dfrac{a_1 + \ldots + a_n}{n}\right)^2 \leq \dfrac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n}$.

EX. 11 | Réf. 3300

On munit $\mathbb{R}^4$ de son produit scalaire usuel, et on considère les vecteurs $v_1 = (0, 3, 1, -1)$ et $v_2 = (1, 2, -1, 1)$.
On note $F = \mathrm{Vect}\ (u_1, u_2)$.
Déterminer un système d'équations de $F^\perp$ puis une base orthonormée de $F^\perp$.

EX. 12 | Réf. 1451

On se place dans $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique. On pose $u_1 = (1, 0, 0, -1)$ et $u_2 = (-1, -1, 1, 1)$.

1. Déterminer une base orthonormale du sous-espace vectoriel $F = \mathrm{Vect}\ (u_1, u_2)$.
2. Déterminer une base orthonormale de $F^\perp$.
3. **a.** En déduire une base orthonormale $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$, autre que la base canonique.
   b. Déterminer dans la base $\mathcal{B}$ les composantes de $v = (1, 2, -1, -1)$ et de $p_F(v)$ où p_F est la projection orthogonale sur F.

EX. 13 | Réf. 1575

Dans l'espace $\mathbb{R}^4$, muni du produit scalaire canonique, on considère le sous-espace vectoriel F défini par :

$$F = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4,\ x_1 + x_2 - x_3 = 0\right\}$$

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$, p le projecteur orthogonal sur F et q le projecteur orthogonal sur $F^\perp$.

1. **a.** Déterminer une base orthonormale de $F^\perp$.
   b. Déterminer la matrice A de q dans la base $\mathcal{B}$.
2. En déduire la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$.

EX. 14 | Réf. 1453

On considère $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique.

1. Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur le plan vectoriel P où :

$$P = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 2y - 3z = 0\right\}$$

2. En déduire la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à P.
3. Calculer ensuite $\mathrm{d}\left((1, 4, -2), P\right)$.