

Thématique(s) de la semaine

AN05 | Séries numériques

- Reprise programme précédent

Exemples de savoir faire à maîtriser

- Reprise programme précédent

Programme à venir . . .

Espaces vectoriels | Cadre général

Pour se préparer

EX. 1 | Réf. 4294

1. Montrer que la série numérique $\sum \frac{1}{n^2 + 4n + 3}$ est convergente.
2. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{(n+1)(n+3)} = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+3}$.
3. En déduire la somme de la série $\sum \frac{1}{n^2 + 4n + 3}$.

EX. 2 | Réf. 2838

Calculer la somme de la série $\sum_{n \geq 1} \ln \left(1 - \frac{1}{(n+2)^2} \right)$.

EX. 3 | Réf. 4276

Étudier la convergence de la série numérique $\sum_{n \geq 2} \left(\frac{3^n}{7^{n-2}} \right)$ et en calculer la somme.

EX. 4 | Réf. 4273

Étudier la convergence et calculer la somme de la série $\sum u_n$ où le terme général de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donné par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \ln \left(1 - \frac{1}{(n+2)^2} \right)$$

EX. 5 | Réf. 4277

On considère la série numérique $\sum u_n$ où : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \ln \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \right)$.

1. Déterminer le terme général de la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$.
2. En déduire la convergence et la somme de la série $\sum u_n$.

EX. 6 | Réf. 4291

On considère série numérique $\sum u_n$ où : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n^3 - 3n^2 + 1}{(n+3)!}$.

- Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $n^3 - 3n^2 + 1 = (n+3)(n+2)(n+1) + a(n+3)(n+2) + b(n+3) + c$.
- En déduire alors l'expression du terme général de la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$.
- Montrer que $\sum u_n$ est convergente, et en calculer la somme.

EX. 7 | Réf. 5379

On se propose dans cette série de déterminer la somme S de la série numérique $\sum \frac{n^2 - 2n + 2}{2^n}$.

- Montrer que cette série est convergente.
- Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 - 2n + 2 = an(n-1) + bn + c$.
- En déduire alors la somme S de cette série.

EX. 8 | Réf. 5380

On se propose dans cet exercice de déterminer la somme S de la série numérique $\sum \frac{n^2 - 4}{n!}$.

- Montrer que cette série est convergente.
- Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 - 4 = an(n-1) + bn + c$.
- En déduire alors la somme S de cette série.

EX. 9 | Réf. 0617

On admet que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Calculer $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)^2}$.

EX. 10 | Réf. 4293

- Montrer que la série numérique $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{(n+2)(n^2-1)}$ est convergente.
- Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \quad \frac{1}{(n+2)(n^2-1)} = \frac{a}{n+2} + \frac{b}{n-1} + \frac{c}{n+1}$$

- En déduire la somme de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n+2)(n^2-1)}$.

EX. 11 | Réf. 4276

Étudier la convergence de la série numérique $\sum_{n \geq 2} \left(\frac{3^n}{7^{n-2}} \right)$ et en calculer la somme.

EX. 12 | Réf. 4273

Étudier la convergence et calculer la somme de la série $\sum u_n$ où le terme général de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donné par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \ln \left(1 - \frac{1}{(n+2)^2} \right)$$

EX. 13 | Réf. 4277

On considère la série numérique $\sum u_n$ où : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \ln \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \right)$.

- Déterminer le terme général de la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$.
- En déduire la convergence et la somme de la série $\sum u_n$.

EX. 14 | Réf. 4291

On considère série numérique $\sum u_n$ où : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{n^3 - 3n^2 + 1}{(n+3)!}$.

- Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $n^3 - 3n^2 + 1 = (n+3)(n+2)(n+1) + a(n+3)(n+2) + b(n+3) + c$.
- En déduire alors l'expression du terme général de la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$.
- Montrer que $\sum u_n$ est convergente, et en calculer la somme.

EX. 15 | Réf. 5286

Pour chacune des séries numériques $\sum u_n$ dont on donne l'expression du terme général u_n , étudier leur convergence.

$$u_n = \frac{n+1}{n^3-7}$$

$$u_n = \frac{n+1}{n^2-7}$$

$$u_n = \frac{n+1}{n-7}$$

$$u_n = \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$u_n = \frac{1}{\ln(n^2+2)}$$

$$u_n = \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$$

$$u_n = \frac{n}{2^n}$$

$$u_n = \frac{2^n + 3^n}{n^2 + \ln(n) + 5^n}$$

$$u_n = \frac{n^{1000}}{n!}$$

EX. 16 | Réf. 4615

Dans tout cet exercice, on supposera que $\sum a_n$ est une série numérique absolument convergente à termes strictement positifs.

- Montrer que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $2|xy| \leq x^2 + y^2$.
- Montrer que la série numérique de terme général $\frac{\sqrt{a_n}}{n}$ est convergente.

EX. 17 | Réf. 4616

On définit la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{n}$.

- Montrer que la série numérique de terme général $\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ n'est pas absolument convergente.
- Montrer que les deux suites extraites $(S_{2n})_{n \geq 1}$ et $(S_{2n+1})_{n \geq 0}$ sont adjacentes.
- Qu'en déduire pour la série numérique de terme général $\frac{(-1)^{n-1}}{n}$?

EX. 18 | Réf. 4614

On considère la série numérique $\sum_{n \geq 1} u_n$ où : $u_n = \frac{\sin\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)}$.

1. Montrer que $\sum_{n \geq 1} u_n$ est une série numérique convergente.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \tan\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n+1}\right)$.
3. Dédire de ce qui précède $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

EX. 19 | Réf. 4610

Établir la convergence de la série de terme général $\frac{\ln(n+1) - \ln(n)}{\ln(n)\ln(n+1)}$ et en calculer sa somme.