Thématique(s) de la semaine

AN05 | Séries numériques

- Somme partielle et série numérique
- Opérations sur les séries
- Séries absolument convergentes
- Séries géométriques et séries dérivées
- Séries de Riemann
- Série exponentielle
- Théorème de convergence pour les séries à termes positifs :
  - ↪ Majoration de la suite des sommes partielles
  - ↪ Théorème de majoration ou de minoration
  - ↪ Règle de d'Alembert
  - ↪ Règle du $n^\alpha u_n$ et du $q^n u_n$
- Convergence et absolue convergence

Exemples de savoir faire à maîtriser

- Étudier la convergence d'une série numérique à partir de l'expression du terme général de la suite des sommes partielles
- Étudier la convergence et calculer la somme d'une série se ramenant à une série de référence à partir de l'expression du terme général de la suite des sommes partielles
- Utiliser les séries géométriques (éventuellement dérivées) pour étudier la convergence et calculer la somme d'une série
- Utiliser la série exponentielle pour étudier la convergence et calculer la somme d'une série
- Établir la convergence par majoration/minoration
- Établir la convergence par une comparaison à une série de Riemann via la règle du $n^\alpha u_n$
- Établir la convergence par une comparaison à une série géométrique via la règle du $q^n u_n$
- Établir la convergence à l'aide de la règle de d'Alembert
- Établir la convergence par absolue convergence

Programme à venir. . .

Reprise programme

Pour se préparer

EX. 1 | Réf. 4294

1. Montrer que la série numérique $\sum \frac{1}{n^2+4n+3}$ est convergente.

2. Déterminer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{(n+1)(n+3)} = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+3}$.

3. En déduire la somme de la série $\sum \frac{1}{n^2+4n+3}$.

EX. 2 | Réf. 2838

Calculer la somme de la série $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1 - \frac{1}{(n+2)^2}\right)$.

EX. 3 | Réf. 4276

Étudier la convergence de la série numérique $\sum_{n\geq 2} \left(\frac{3^n}{7^{n-2}}\right)$ et en calculer la somme.

EX. 4 | Réf. 4273

Étudier la convergence et calculer la somme de la série $\sum u_n$ où le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donné par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{(n+2)^2}\right)$$

EX. 5 | Réf. 4277

On considère la série numérique $\sum u_n$ où : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \ln\left(\dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)$.

1. Déterminer le terme général de la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$.

2. En déduire la convergence et la somme de la série $\sum u_n$.

EX. 6 | Réf. 4291

On considère série numérique $\sum u_n$ où : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{n^3 - 3n^2 + 1}{(n+3)!}$.

1. Déterminer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $n^3 - 3n^2 + 1 = (n+3)(n+2)(n+1) + a(n+3)(n+2) + b(n+3) + c$.

2. En déduire alors l'expression du terme général de la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$.

3. Montrer que $\sum u_n$ est convergente, et en calculer la somme.

EX. 7 | Réf. 5379

On se propose dans cette série de déterminer la somme S de la série numérique $\sum \dfrac{n^2 - 2n + 2}{2^n}$.

1. Montrer que cette série est convergente.

2. Déterminer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ n^2 - 2n + 2 = an(n-1) + bn + c$.

3. En déduire alors la somme S de cette série.

EX. 8 | Réf. 5380

On se propose dans cet exercice de déterminer la somme S de la série numérique $\sum \dfrac{n^2 - 4}{n!}$.

1. Montrer que cette série est convergente.

2. Déterminer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ n^2 - 4 = an(n-1) + bn + c$.

3. En déduire alors la somme S de cette série.

EX. 9 | Réf. 0617

On admet que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)^2}$.

EX. 10 | Réf. 4293

1. Montrer que la série numérique $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{(n+2)(n^2-1)}$ est convergente.
2. Déterminer $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tels que :
$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{1\},\quad \frac{1}{(n+2)(n^2-1)}=\frac{a}{n+2}+\frac{b}{n-1}+\frac{c}{n+1}$$
3. En déduire la somme de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n+2)(n^2-1)}$.

EX. 11 | Réf. 4276

Étudier la convergence de la série numérique $\sum_{n\geq 2}\left(\frac{3^n}{7^{n-2}}\right)$ et en calculer la somme.

EX. 12 | Réf. 4273

Étudier la convergence et calculer la somme de la série $\sum u_n$ où le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donné par :
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=\ln\left(1-\frac{1}{(n+2)^2}\right)$$

EX. 13 | Réf. 4277

On considère la série numérique $\sum u_n$ où : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=\ln\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)$.

1. Déterminer le terme général de la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$.
2. En déduire la convergence et la somme de la série $\sum u_n$.

EX. 14 | Réf. 4291

On considère série numérique $\sum u_n$ où : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\frac{n^3-3n^2+1}{(n+3)!}$.

1. Déterminer $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, $n^3-3n^2+1=(n+3)(n+2)(n+1)+a(n+3)(n+2)+b(n+3)+c$.
2. En déduire alors l'expression du terme général de la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$.
3. Montrer que $\sum u_n$ est convergente, et en calculer la somme.

EX. 15 | Réf. 5286

Pour chacune des séries numériques $\sum u_n$ dont on donne l'expression du terme général u_n, étudier leur convergence.

$u_n=\frac{n+1}{n^3-7}$	$u_n=\frac{n+1}{n^2-7}$	$u_n=\frac{n+1}{n-7}$
$u_n=\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$	$u_n=\frac{1}{\ln(n^2+2)}$	$u_n=\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$
$u_n=\frac{n}{2^n}$	$u_n=\frac{2^n+3^n}{n^2+\ln(n)+5^n}$	$u_n=\frac{n^{1000}}{n!}$

EX. 16 | Réf. 4615

Dans tout cet exercice, on supposera que $\sum a_n$ est une série numérique absolument convergente à termes strictement positifs.

1. Montrer que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 2|xy| \leq x^2 + y^2$.

2. Montrer que la série numérique de terme général $\dfrac{\sqrt{a_n}}{n}$ est convergente.

EX. 17 | Réf. 4616

On définit la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{n}$.

1. Montrer que la série numérique de terme général $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ n'est pas absolument convergente.

2. Montrer que les deux suites extraites $(S_{2n})_{n\geq 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geq 0}$ sont adjacentes.

3. Qu'en déduire pour la série numérique de terme général $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$?

EX. 18 | Réf. 4614

On considère la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ où : $u_n = \dfrac{\sin\left(\dfrac{1}{n(n+1)}\right)}{\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\cos\left(\dfrac{1}{n+1}\right)}$.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ est une série numérique convergente.

2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \tan\left(\dfrac{1}{n}\right) - \tan\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$.

3. Déduire de ce qui précède $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

EX. 19 | Réf. 4610

Établir la convergence de la série de terme général $\dfrac{\ln(n+1) - \ln(n)}{\ln(n)\ln(n+1)}$ et en calculer sa somme.