Question de cours - 5 minutes - 2 points

Les énoncés ci-contre pourront vous être demandés explicitement avec toutes leurs hypothèses, avec ou sans démonstration:

- AN05 - Proposition 3 - Séries géométriques dérivées
- AN05 - Théorème 8 - Critère de convergence pour les séries de Riemann
- AN05 - Théorème 13 - Règle de d'Alembert
- PR05 - Théorème 6 - Lien entre variance et covariance
- PR05 - Définition 6 et Théorème 5 - Covariance de deux variables aléatoires finies et Calcul pratique de la covariance
- PR05 - Théorème 8 et Théorème 7 - Covariance de deux variables aléatoires indépendantes et Variance de deux variables aléatoires indépendantes

Pratique calculatoire - 15/20 minutes - 8 points

Calcul de la somme d'une série numérique faisant intervenir les séries géométriques dérivées ou la série exponentielle.

Ou

Calculer la covariance d'un couple de variables aléatoires à support fini dont la loi conjointe est donnée dans un tableau de valeurs.

Thématique(s) de la semaine - 30 minutes - 10 points

Un ou plusieurs exercice(s) vous sera(ont) proposé(s) par votre interrogateur tels ceux proposés dans la banque d'exercices ci-après.
Ils porteront sur les chapitres et savoir-faire détaillés ci-dessous.

AN05 - Séries numériques

- Reprise de son cours de 1e année | A déjà dû être révisé pour la rentrée

PR03 - Variables aléatoires finies sur un univers fini

- Reprise de son cours de 1e année | A déjà dû être révisé pour le DS du 12/09/2022

PR04 - Lois usuelles finies

- Reprise de son cours de 1e année | A déjà dû être révisé pour le DS du 12/09/2022

PR05 - Indépendance et couples de variableas aléatoires finies

- Loi conjointe
- Lois marginales et lois conditionnelles
- Indépendance de deux variables aléatoires finies
- Indépendance de n variables aléatoires
- Somme et produit de deux variables aléatoires finies
- Covariance et coefficient de corrélation linéaire
- Covariance et indépendance

Exemples de savoir faire à maîtriser

- Étudier la convergence d'une série numérique à termes positifs (théorème d'équivalence notamment)
- Déterminer la somme d'une série numérique à l'aide de séries géométriques ou exponentielles
- Déterminer la loi d'un couple de variables aléatoires
- Déterminer les lois marginales d'un couple de variables aléatoires
- Déterminer les lois conditionnelles d'un couple de variables aléatoires
- Montrer que deux variables aléatoires sont indépendantes
- Calculer la covariance d'un couple et le coefficient de corrélation linéaire d'un couple de variables aléatoires

Programme à venir

Reprise du programme actuel | Indépendance et couples de variables aléatoires | Suite et fin

Pour la pratique calculatoire

Exercice| [4625] | 1| Somme d'une série numérique

On se propose dans cette série de déterminer la somme S de la série numérique $\sum \frac{n^2-2n+2}{2^n}$.

(1). Montrer que cette série est convergente.

(2). Déterminer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ n^2-2n+2 = an(n-1)+bn+c$.

(3). En déduire alors la somme S de cette série.

Exercice| [4348] | 2| Somme d'une série numérique

On se propose dans cet exercice de déterminer la somme S de la série numérique $\sum \frac{n^2-4}{n!}$.

(1). Montrer que cette série est convergente.

(2). Déterminer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ n^2-4 = an(n-1)+bn+c$.

(3). En déduire alors la somme S de cette série.

Exercice| [4763] | 3| Couples de variables aléatoires

Soient X et Y deux variables alétoires discrètes avec $X(\Omega) = \{-1,0,1\}$ et $Y(\Omega) = \{-1,0,1\}$, et dont la loi du couple (X,Y) est donnée par le tableau suivant :

X \ Y	-1	0	1
-1	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$
0	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$
1	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$

(1). Donner les lois marginales de X et de Y.

(2). Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{V}(X)$, $\mathbb{V}(Y)$ et $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Sur l'ensemble du programme

Exercice| [4276] | 4| Somme d'une série

Étudier la convergence de la série numérique $\sum_{n\geq 2}\left(\frac{3^n}{7^{n-2}}\right)$ et en calculer la somme.

Exercice| [4293] | 5| Séries numériques

(1). Montrer que la série numérique $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{(n+2)(n^2-1)}$ est convergente.

(2). Déterminer $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tels que :

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{1\},\quad \frac{1}{(n+2)(n^2-1)}=\frac{a}{n+2}+\frac{b}{n-1}+\frac{c}{n+1}$$

(3). En déduire la somme de la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n+2)(n^2-1)}$.

Exercice| [4273] | 6| Séries numériques

Étudier la convergence et calculer la somme de la série $\sum u_n$ où le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donné par :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=\ln\left(1-\frac{1}{(n+2)^2}\right)$$

Exercice| [4277] | 7| Somme d'une série

On considère la série numérique $\sum u_n$ où : $\quad\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=\ln\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)$.

(1). Déterminer le terme général de la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$.

(2). En déduire la convergence et la somme de la série $\sum u_n$.

Exercice| [1331] | 8| Lois marginales et lois conditionnelles d'un couple de variables aléatoires finies

La loi du couple aléatoire finies (X,Y) est donné par le tableau suivant :

X \ Y	0	1	2
3	3α	6α	7α
7	9α	12α	15α
37	0	0	18α

(1). Déterminer la constante α.

(2). Donner les lois marginales de X et de Y.

(3). Quelle est la loi de Y sachant que $[X\leq 7]$?

Exercice| [1248] | 9| Couples de variables aléatoires

Soient X et Y deux variables aléatoires de Bernouilli de paramètres respectifs p et r telles que $\mathrm{Cov}(X, Y)=0$. Montrer que X et Y sont indépendantes.

Exercice| [1253] | 10| Indpéndance d'un couple de variables aléatoires

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n avec $n\geq 2$. On effectue deux tirages d'une boule avec remise dans cette urne. Soit X (resp. Y) la variable aléatoire égale au plus petit (resp. plus grand) des deux numéros tirés.

(1). Déterminer la loi du couple (X,Y) et en déduire les loi de X et Y.

(2). Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$.

(3). X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice| [4400] | 11| Maximum d'une famille de variables aléatoires de même loi

Dans tout cet exercice, n désigne un entier naturel non nul.
Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes définie sur le même espace probabilisé et qui suivent toutes la loi uniforme sur l'ensemble $[\![1;n]\!]$.
On désigne alors par Y la variable aléatoire égale au maximum des variables aléatoires X_1, X_2, $\ldots$, X_n, c'est à dire que $Y=\max(X_1, \ldots, X_n)$.

(1). Déterminer la loi de Y.

(2). Montrer que $\mathbb{E}(Y)=n-\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^n$.