Question de cours | Restitution de cours | Situation classique | 5 minutes | 2 points

Les énoncés ci-contre pourront vous être demandés explicitement avec toutes leurs hypothèses, avec ou sans démonstration:

- PR11 - Définition 1 & Théorèmes 1 et 2 - Loi uniforme | Schéma/graphiques compris
- PR11 - Définition 2 & Théorème 3 & Proposition 1 - Loi exponentielle | Schéma/graphiques compris
- PR11 - Définition 3 & Théorème 5 & Proposition 2 - Loi normale centrée réduite | Schéma/graphiques compris

Pratique calculatoire | 20 minutes | 8 points

Montrer qu'une fonction est une densité de probabilité

ou

Obtenir la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité à partir d'une densité de probabilité

Thématique(s) de la semaine | 30 minutes | 10 points

PR10 - Variables aléatoires à densité

- Fonction de répartition
- Variables aléatoires à densité
- Lien densité et fonction de répartition
- Fonction densité
- Probabilités et variable aléatoire réelle à densité
- Moments d'une variable aléatoire à densité
- Inégalités et Markov de Bienaymé-Tchebychev

PR11 - Lois à densité usuelle

- Loi uniforme
- Loi exponentielle
- Loi normale centrée r'eduite
- Loi de Laplace-Gauss

Exemples de savoir faire à maîtriser

- Reprise du programme précédent
- Montrer qu'une variable aléatoire à densitádmet une espérance et/ou une variance
- Déterminer l'espérance d'une variable aléatoire à densité
- Déterminer la variance d'une variable aléatoire à densité
- Manipuler les lois à densité usuelles

Programme à venir...

Reprise programme

Pour la pratique calculatoire

EX. 1 | Réf. 1490

1. Montrer que la fonction f donnée par : $$f : \begin{array}{|ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{1}{2}(x+1) & \text{si } x \in [-1;0[\\ \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \end{array}$$ est une densité de probabilité.
2. On note X un variable aléatoire de densité f. Donner la fonction de répartition F de X.

EX. 2 | Réf. 1347

Soit $a \in \mathbb{R}$ et f la fonction donnée par : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ \dfrac{a}{x\sqrt{x}} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \end{array} \right.$

1. Déterminer a pour que f soit une densité de probabilité.

2. Soit X une variable aléatoire de densité f.

a. Calculer sa fonction de répartition F.

b. Montrer que X n'admet pas d'espérance.

Sur l'ensemble du programme

EX. 3 | Réf. 1346

1. Montrer que la fonction f donnée par : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{1}{|x|^3} & \text{si} \quad |x| > 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$

est une densité de probabilité.

2. On note X un variable aléatoire de densité f. Donner la fonction de répartition F de X.

3. X admet-elle une espérance ? une variance ?

EX. 4 | Réf. 1348

On considère la fonction f donnée par : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{-|x-20|} \end{array} \right.$

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et en calculer sa valeur.

2. Déterminer le réel k tel que la fonction g définie par $g : x \longmapsto k \times f(x)$ soit une densité de probabilité.

3. **a.** Une entreprise vend de la farine conditionnée en sacs. Le poids en kilogrammes d'une sac est une variable aléatoire X admettant g comme densité de probabilité. Montrer que X admet une espérance.

b. Déterminer la fonction de répartition de X.

c. Quelle est la probabilité qu'un sac pèse plus de 20 kilos ?

d. Quelle est la probabilité qu'un sac pèse moins de 21 kilos sachant qu'il pèse plus de 20 kilos.

EX. 5 | Réf. 1350

1. Montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F : x \longmapsto \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité X.

2. Déterminer une densité f de la variable aléatoire X.

3. Montrer que X admet une espérance et que $\mathbb{E}(X) = 0$.