

Question de cours - 5 minutes - 2 points

Les énoncés ci-contre pourront vous être demandés explicitement avec toutes leurs hypothèses, avec ou sans démonstration:

- AL10 - Théorème 2 - Noyau, surjectivité et injectivité pour $f : E \rightarrow F$
- AL10 - Théorème 8 - Théorème du rang
- AL10 - Théorème 9 ou 10 - Caractérisation des isomorphismes/automorphismes en dimension finie

Pratique calculatoire - 15/20 minutes - 8 points

Montrer qu'une application est une application linéaire

et

Construire la matrice de cette application dans les bases canoniques des espaces vectoriels considérés

Thématique(s) de la semaine - 30 minutes - 10 points

Un ou plusieurs exercice(s) vous sera(ont) proposé(s) par votre interrogateur tels ceux proposés dans la banque d'exercices ci-après. Ils porteront sur les chapitres et savoir-faire détaillés ci-dessous.

AL07 | Travailler dans les espaces usuels de dimension finie

- Reprise du programme précédent

AL08 | Travailler en dimension finie

- Reprise programme précédent

AL09 | Noyau et image d'une matrice

- Reprise programme précédent

AL10 | Applications linéaires

- Reprise programme précédent

AL11 | Matrices d'applications linéaires

- Reprise programme précédent

Exemples de savoir faire à maîtriser

- Reprise programme précédent

Programme à venir

Séries numériques

Pour la pratique calculatoire**Exercice| [4918] | 1| Matrice d'application linéaire**

On considère l'application f donnée par :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto (2x - y + z, x - 2y + z, -x - y + 2z) \end{cases}$$

- (1). Montrer que f est un endomorphisme de \mathbb{R}^3 .
- (2). Déterminer la matrice de f dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .
- (3). f est-elle un automorphisme ?

Exercice| [1478] | 2| Étude d'un endomorphisme

On considère l'application f donnée par :

$$f : \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto M + (b+c)I_2 + (a+d) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

- (1). Montrer que f est linéaire.
- (2). Écrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- (3). f est-elle un automorphisme ?

Exercice| [3640] | 3| Matrice d'application linéaire

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto 3(X+2)P - (X^2-1)P' \end{cases}$ et on note \mathcal{B} la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

- (1). Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X])$.
- (2). Déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
- (3). f est-elle bijective ?

Sur l'ensemble du programme**Exercice| [3634] | 4| Matrice d'une application linéaire**

On considère l'application f donnée par : $f : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ c + bX + aX^2 & \longmapsto (-c + 2b + a) + (b + a)X + (2c - \end{cases}$

- (1). Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
- (2). Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

- (3). Déterminer une base de l'image et du noyau de f .
- (4). Qu'en déduire pour f ?

Exercice| [3649] | 5| Étude d'un endomorphisme

On considère l'application f donnée par :

$$f : \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto \frac{-a+2d}{2}I_2 + \frac{2b-c}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

- (1). Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- (2). Déterminer les images par f de vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- (3). En déduire la matrice de f dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- (4). Déterminer alors le rang de f .
- (5). f est-elle un automorphisme?

Exercice| [3633] | 6| Matrice d'une application linéaire

On considère l'application f donnée par : $f : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ P & \longmapsto (P(-1), P(0), P(1)) \end{cases}$.

- (1). Montrer que f est une application linéaire.
- (2). Donner la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et \mathbb{R}^3 .
- (3). Déterminer une base de l'image et du noyau de f .
- (4). Qu'en conclure pour f ?

Exercice| [3644] | 7| Matrice d'application linéaire

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto P(X+1) - P(X) \end{cases}$ et on note \mathcal{B} la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

- (1). Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$.
- (2). Déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
- (3). f est-elle bijective?

Exercice| [0435] | 8| Matrice d'une application linéaire

On considère l'application φ donnée par :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ P & \longmapsto \left(P(0) + P(1), \int_0^1 P(t) dt, \int_0^1 tP(t) dt \right) \end{cases}$$

- (1). Montrer que φ est une application linéaire.
- (2). Donner la matrice de φ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et \mathbb{R}^3 .
- (3). Déterminer le rang de φ . Qu'en déduire pour φ ?

Exercice| [0418] | 9| Application linéaire de matrices

Dans tout ce qui suit, on désigne par A la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donnée par : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

On considère alors $T : \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto MA - AM \end{cases}$.

- (1). Montrer que T est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- (2). Déterminer la matrice de T dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- (3). T est-il un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

Exercice| [0393] | 10| Applications linéaires

On désigne par T l'unique endomorphisme de \mathbb{R}^2 qui vérifie $T(3, 1) = (2, -4)$ et $T(1, 1) = (0, 2)$.

- (1). Calculer $T(7, 4)$.
- (2). Justifier que T est en fait un automorphisme.
- (3). Calculer alors $T^{-1}(5, -3)$.