

**Question de cours | Restitution de cours | Situation classique | 5 minutes | 2 points**

Les énoncés ci-contre pourront vous être demandés explicitement avec toutes leurs hypothèses, avec ou sans démonstration:

- AN14 - Théorème 5 - Intégrales de Riemann | Critère de convergence et valeur
- AN14 - Théorème 6 - Convergence et valeur de  $\int_0^{+\infty} e^{-at} dt$
- AN14 - Théorème 8 - Théorème de comparaison pour les intégrales impropres de fonctions positives »
- AN14 - Théorèmes 10 et 11 - Règle du «  $t^\alpha f(t)$  » en 0 et en  $+\infty$

**Pratique calculatoire | 20 minutes | 8 points**

Obtenir la convergence et la valeur d'une intégrale impropre en sa borne supérieure par la définition.

Votre interrogateur vous proposera deux situations de travail en pratique calculatoire, et on rappelle que toute étude d'une intégrale impropre débute par l'explicitation du domaine de continuité et de l'identification des bornes impropres.

**Thématique(s) de la semaine | 30 minutes | 10 points****AN14 | Intégrales généralisées**

- Reprise programme précédent

**Exemples de savoir faire à maîtriser**

- Reprise programme précédent

**Programme à venir...**

Variables aléatoires à densité

**Pour la pratique calculatoire****EX. 1 | Réf. 4818**

Étudier la convergence et calculer la valeur de l'intégrale impropre  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} dx$ .

**Sur l'ensemble du programme****EX. 2 | Réf. 4247**

Parmi les intégrales suivantes, lesquelles sont convergentes ?

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 + 1} dx$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^3 + 3t^2 + t}} dt$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t} + t}{t^3} dt$$

## EX. 3 | Réf. 5183

Déterminer si les intégrales suivantes sont convergentes, et le cas échéant, calculer leur valeur.

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2} dt$$

$$\int_{-\infty}^0 te^{-t^2} dt$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

$$\int_0^{+\infty} 1 dt$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{3^t} dt$$

$$\int_0^{+\infty} te^{-t} dt$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$$

## EX. 4 | Réf. 4248

Parmi les intégrales suivantes, lesquelles sont convergentes ?

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{x}{x^3+1}} dx$$

$$\int_2^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{2}{x^3}\right) dx$$

$$\int_2^{+\infty} \ln\left(2 + \frac{2}{x^3}\right) dx$$

## EX. 5 | Réf. 4817

Établir la convergence de l'intégrale :  $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$

## EX. 6 | Réf. 4602

On considère l'intégrale impropre  $I = \int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt$ .

1. Montrer que  $I$  est une intégrale convergente.
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \int_a^b \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt = b \ln\left(1 + \frac{1}{b^2}\right) - a \ln(1 + a^2) + 2a \ln(a) + 2\arctan(b) - 2\arctan(a)$$

3. En déduire alors la valeur de l'intégrale  $I$ .

## EX. 7 | Réf. 4606

Montrer que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2+1} dt$  est une intégrale convergente.