Question de cours - 5 minutes - 2 points

Les énoncés ci-contre pourront vous être demandés explicitement avec toutes leurs hypothèses, avec ou sans démonstration:

- AL10 - Théorème 2 - Noyau, surjectivité et injectivité pour $f : E \longrightarrow F$
- AL10 - Théorème 8 - Théorème du rang
- AL10 - Théorème 9 ou 10 - Caratérisation des isomorphismes/automorphismes en dimension finie

Pratique calculatoire - 15/20 minutes - 8 points

Montrer qu'une application est une application linéaire

et

Construire la matrice de cette application dans les bases canoniques des espaces vectoriels considérés

Thématique(s) de la semaine - 30 minutes - 10 points

Un ou plusieurs exercice(s) vous sera(ont) proposé(s) par votre interrogateur tels ceux proposés dans la banque d'exercices ci-après.
Ils porteront sur les chapitres et savoir-faire détaillés ci-dessous.

AL07 | Travailler dans les espaces usuels de dimension finie

- Reprise du programme précédent

AL08 | Travailler en dimension finie

- Reprise programme précdent

AL09 | Noyau et image d'une matrice

- Reprise programme précédent

AL10 | Applications linéaires

- Reprise programme précédent
- Applications linéaires injectives, surjectives et bijective
- Lien injectivité et noyau
- Lien surjectivité et image
- Théorème du rang
- Caractérisation des isomorphismes, des automorphismes et des bases

AL11 | Matrices d'applications linéaires

- Matrice d'une application de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^p)$ puis de$\mathcal{L}(E, F)$
- Caractérisation des isomorphismes, des automorphismes et des bases par leur représentation matricielle
- Formules de changement bases (ne pas interroger)

Exemples de savoir faire à maîtriser

- Reprise programme précédent
- Construire la matrice d'une application linéaire
- Utiliser la matrice d'une application linéaire pour le calcul d'image d'un vecteur
- Utiliser la matrice d'une application linéaire pour la recherche d'éléments du noyau
- Utiliser la matrice d'une application linéaire pour la recherche d'une base de l'image

Programme à venir

Matrices d'applications linéaires (fin) | Reprise du programme

Pour la pratique calculatoire

Exercice| [4918] | 1| Matrice d'application linéaire

On considère l'application f donnée par :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x-y+z, x-2y+z, -x-y+2z) \end{array} \right.$$

(1). Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

(2). Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(3). f est-elle un automorphisme ?

Exercice| [1478] | 2| Étude d'un endomorphisme

On considère l'application f donnée par :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & M + (b+c)I_2 + (a+d)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

(1). Montrer que f est linéaire.

(2). Écrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

(3). f est-elle un automorphisme ?

CC BY NC ND

Exercice| [3640] | 3| Matrice d'application linéaire

Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & 3(X+2)P - \left(X^2-1\right)P' \end{array} \right.$ et on note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

(1). Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X])$.

(2). Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

(3). f est-elle bijective ?

Sur l'ensemble du programme

Exercice| [3634] | 4| Matrice d'une application linéaire

On considère l'application f donnée par : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ c+bX+aX^2 & \longmapsto & (-c+2b+a)+(b+a). \end{array} \right.$

(1). Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

(2). Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

(3). Déterminer une base de l'image et du noyau de f.

(4). Qu'en déduire pour f ?

Exercice| [3649] | 5| Étude d'un endomorphisme

On considère l'application f donnée par :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & \dfrac{-a+2d}{2}\mathrm{I}_2 + \dfrac{2b-c}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

(1). Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

(2). Déterminer les images par f de vecteurs de la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

(3). En déduire la matrice de f dans la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

(4). Déterminer alors le rang de f.

(5). f est-elle un automorphisme ?

Exercice| [3633] | 6| Matrice d'une application linéaire

On considère l'application f donnée par : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ P & \longmapsto & (P(-1), P(0), P(1)) \end{array} \right.$.

(1). Montrer que f est une application linéaire.

(2). Donner la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}^3$.

(3). Déterminer une base de l'image et du noyau de f.

(4). Qu'en conclure pour f ?

Exercice| [3644] | 7| Matrice d'application linéaire

Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1) - P(X) \end{array} \right.$ et on note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

(1). Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$.

(2). Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

(3). f est-elle bijective ?

Exercice| [0435] | 8| Matrice d'une application linéaire

On considère l'application φ donnée par :

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ P & \longmapsto & \left(P(0)+P(1), \displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t, \int_0^1 tP(t)\,\mathrm{d}t\right) \end{array} \right.$$

(1). Montrer que φ est une application linéaire.

(2). Donner la matrice de φ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}^3$.

(3). Déterminer le rang de φ. Qu'en déduire pour φ ?

Exercice| [0418] | 9| Application linéaire de matrices

Dans tout ce qui suite, on désigne par A la matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ donnée par : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

On considère alors $T : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & MA - AM \end{array} \right.$.

(1). Montrer que T est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

(2). Déterminer la matrice de T dans la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

(3). T est-il un automorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$?

Exercice| [0393] | 10| Applications linéaires

On désigne par T l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui vérifie $T(3,1) = (2,-4)$ et $T(1,1) = (0,2)$.

(1). Calculer $T(7,4)$.

(2). Justifier que T est en fait un automorphisme.

(3). Calculer alors $T^{-1}(5,-3)$.