Question de cours | Restitution de cours | Situation classique | 5 minutes | 2 points

Les énoncés ci-contre pourront vous être demandés explicitement avec toutes leurs hypothèses, avec ou sans démonstration:

- AN14 - Théorème 5 - Intégrales de Riemann | Critère de convergence et valeur
- AN14 - Théorème 6 - Convergence et valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$
- AN14 - Théorème 8 - Théorème de comparaison pour les intégrales impropres de fonctions positives »
- AN14 - Théorèmes 10 et 11 - Règle du « $t^\alpha f(t)$ » en 0 et en $+\infty$

Pratique calculatoire | 20 minutes | 8 points

Obtenir la convergence et la valeur d'une intégrale impropre en sa borne supérieure par la définition.

Votre interrogateur vous proposera deux situations de travail en pratique calculatoire, et on rappelle que toute étude d'une intégrale impropre débute par l'explicitation du domaine de continuité et de l'identification des bornes impropres.

Thématique(s) de la semaine | 30 minutes | 10 points

AN14 | Intégrales généralisées

- Définition d'une intégrale impropre en une ou en ses deux bornes
- Opérations sur les intégrales impropres
- Absolue convergence et lien avec la convergence
- Théorèmes de comparaison pour les intégrales impropres de fonctions positives
- Règle du $t^\alpha f(t)$ en 0 et $+\infty$

Exemples de savoir faire à maîtriser

- Montrer qu'une intégrale est convergente à partir de la définition
- Montrer qu'une intégrale est convergente à l'aide du théorème de comparaison pour les intégrales impropres de fonctions positives
- Utiliser la règle du $t^\alpha f(t)$ pour établir la convergence/divergence d'une intégrale

Programme à venir...

Intégrales impropres/généralisées | Reprise programme actuel

Pour la pratique calculatoire

EX. 1 | Réf. 4818

Étudier la convergence et calculer la valeur de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,\mathrm{d}x$.

Sur l'ensemble du programme

EX. 2 | Réf. 4247

Parmi les intégrales suivantes, lesquelles sont convergentes ?

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$	$\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{t^3+3t^2+t}}\,\mathrm{d}t$	$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}+t}{t^3}\,\mathrm{d}t$

EX. 3 | Réf. 5183

Déterminer si les intégrales suivantes sont convergentes, et le cas échéant, calculer leur valeur.

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$	$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$	$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$
$\displaystyle\int_{-\infty}^0 t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$	$\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$	$\displaystyle\int_0^{+\infty} 1\,\mathrm{d}t$
$\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{3^t}\,\mathrm{d}t$	$\displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$	$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

EX. 4 | Réf. 4248

Parmi les intégrales suivantes, lesquelles sont convergentes ?

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{x}{x^3+1}}\,\mathrm{d}x$	$\displaystyle\int_2^{+\infty} \ln\left(1+\frac{2}{x^3}\right)\mathrm{d}x$	$\displaystyle\int_2^{+\infty} \ln\left(2+\frac{2}{x^3}\right)\mathrm{d}x$

EX. 5 | Réf. 4817

Établir la convergence de l'intégrale : $\displaystyle I = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}$

EX. 6 | Réf. 4602

On considère l'intégrale impropre $\displaystyle I = \int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$.

1. Montrer que I est une intégrale convergente.

2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*,\ \int_a^b \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = b\ln\left(1+\frac{1}{b^2}\right) - a\ln\left(1+a^2\right) + 2a\ln(a) + 2\arctan(b) - 2\arctan(a)$$

3. En déduire alors la valeur de l'intégrale I.

EX. 7 | Réf. 4606

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$ est une intégrale convergente.