Question de cours - 5 minutes - 2 points

Les énoncés ci-contre pourront vous être demandés explicitement avec toutes leurs hypothèses, avec ou sans démonstration:

- AL08 - Théorème 5 - Équivalence, libre et génératrice
- AL08 - Théorème 6 - Lien entre rang et cardinal de la famille
- AL08 - Théorème 11 - Rang et bases

Pratique calculatoire - 15/20 minutes - 8 points

Montrer qu'une application est une application linéaire

Thématique(s) de la semaine - 30 minutes - 10 points

Un ou plusieurs exercice(s) vous sera(ont) proposé(s) par votre interrogateur tels ceux proposés dans la banque d'exercices ci-après.
Ils porteront sur les chapitres et savoir-faire détaillés ci-dessous.

AL07 | Travailler dans les espaces usuels de dimension finie

- Reprise du programme précédent

AL08 | Travailler en dimension finie

- Reprise programme précd́ent

AL09 | Noyau et image d'une matrice

- Application $f : X \longmapsto AX$
- Noyau d'une matrice
- Image d'une matrice
- Famille génératrice de l'image d'une matrice

AL10 | Applications linéaires

- Application linéaire
- Propriétés structurelles de $\mathcal{L}(E, F)$
- Noyau et image d'une application linéaire
- Image et noyau d'une application linéaire
- Famillle génératrice de l'image

Exemples de savoir faire à maîtriser

- Reprise programme précédent
- Déterminer le noyau d'une matrice
- Déterminer l'image d'une matrice
- Montrer qu'une application est linéaire

Programme à venir

Applications linéaires (suite) | Matrices d'applications linéaires

Pour la pratique calculatoire

Exercice| [5233] | 1| Endomorphisme de $\mathbb{R}^3$

Montrer que l'application f donnée par $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-y, y-z, z-x) \end{array} \right.$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Exercice| [5234] | 2| Endomorphisme de $\mathbb{R}^3$

Soient u, v et w trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
Montrer que l'application f donnée par

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+z)u + (x-y+z)v + (2x+y-z)w \end{array} \right.$$

est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Exercice| [5235] | 3| Endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Montrer que l'application f donnée par

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & M + AM + MA^2 \end{array} \right.$$

est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Sur l'ensemble du programme

Exercice| [3587] | 4| Noyau et image d'une matrice

Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -3 & -1 \\ 3 & -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice| [5225] | 5| Famille génératrice de l'image d'une matrice

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(1). Montrer que la famille formées par les colonnes de la matrice A est une famille liée.

(2). Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ engendré par les quatre colonnes C_1, C_2, C_3 et C_4 de A.

(3). En déduire une base de $\mathrm{Im}\,(A)$.

Exercice| [5226] | 6| Base de l'image d'une matrice

On considère la matrice A de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ donnée par $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(1). On considère une matrice colonne $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$ quelconque de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. À quelle(s) condition(s) sur B le système linéaire de représentation matricielle $(A|B)$ admet-il des solutions ?

(2). Déduire de ce qui précède une description de $\mathrm{Im}\,(A)$ à l'aide d'équations.

(3). Montrer que $\mathrm{Ker}\,(A)$ est une droite vectorielle que l'on identifiera.

(4). Montrer que la famille de matrices colonnes formée par les colonnes de A est une famille liée, puis en déduire une base de $\mathrm{Im}\,(A)$.

Exercice| [3619] | 7| Combinaison linéaire

Soit $u_1 = (1, -1, 2, 1)$, $u_2 = (-1, 2, 1, 0)$, $u_3 = (1, 1, 0, 1)$, $u_4 = (-1, 1, 2, 0)$ et $u_5 = (-1, -4, -1, -2)$.
Déterminer les relations de dépendances entre ces vecteurs.

Exercice| [3589] | 8| Espaces vectoriels

Déterminer une base et la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ engendré par les matrices $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice| [3610] | 9| Espaces vectoriels

Quelle est la dimension de $\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})$ où $\mathcal{F} = (X_1, \ldots, X_4)$ avec $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$?

Exercice| [2767] | 10| Sous-espace de $\mathcal{M}_2\,(\mathbb{R})$

Soit $F = \left\{ \begin{pmatrix} a+2b & a-b \\ 3b & 2a \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

(1). Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

(2). Déterminer une base et la dimension de F.

Exercice| [3441] | 11| Endomorphisme de $\mathcal{M}_n\,(\mathbb{R})$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

(1). Montrer que $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM - MA \end{array} \right.$ est un endomorphisme.

(2). Dans le cas où $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, f est-il un automorphisme ?