Question de cours - 5 minutes - 2 points

Les énoncés ci-contre pourront vous être demandés explicitement avec toutes leurs hypothèses, avec ou sans démonstration:

- AL16 - Proposition 3 - Formules liant produit scalaire et norme
- AL16 - Théorèm 4 - Liberté d'une famille orthogonale
- AL16 - Définition 7 & Théorème 6 - Orthogonal d'un sous-espace | Structure vectorielle de l'orthogonal

Pratique calculatoire - 15/20 minutes - 8 points

Reprise des questions de pratique calculatoire sur les variables aléatoires à densité

Thématique(s) de la semaine - 30 minutes - 10 points

Un ou plusieurs exercice(s) vous sera(ont) proposé(s) par votre interrogateur tels ceux proposés dans la banque d'exercices ci-après.
Ils porteront sur les chapitres et savoir-faire détaillés ci-dessous.

PR10 - Variables aléatoires à densité

- Reprise programme précédent

PR11 - Lois à densité usuelle

- Reprise programme précédent

AL16 - Produit scalaire et orthogonalité dans $\mathbb{R}^n$

- Produit scalaire euclidien et norme associée
- Distance euclidienne
- Propriétés du produit scalaire, norme et distance
- Inégalité de Cauchy-Schwarz
- Identités remarquables et de polarisation
- Vecteurs orthogonaux et familles orthogonales/orthonormées
- Caractère libre d'une famille orthogonale
- Vecteur orthogonal à un sous-espace et sous-espaces orthogonaux
- Orthogonal d'un sous-espace

Exemples de savoir faire à maîtriser

- Reprise du programme précédent
- Effectuer un produit scalaire ou calculer une norme
- Utiliser la bilinéarité du produit scalaire
- Montrer que deux vecteurs sont orthogonaux
- Montrer qu'un vecteur appartient à l'orthogonal d'un sous-espace
- Déterminer une base de l'orthogonal d'un sous-espace

Programme à venir

Produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$ (fin) | Bases orthonormées de $\mathbb{R}^\times$ et supplémentaire orthogonal

Pour la pratique calculatoire

Exercice| [1490] | 1| Densité et fonction de répartition

(1). Montrer que la fonction f donnée par : $f : \begin{array}{|ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{1}{2}(x+1) & \text{si } x \in [-1;0[\\ \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \end{array}$

est une densité de probabilité.

(2). On note X un variable aléatoire de densité f. Donner la fonction de répartition F de X.

Exercice| [1347] | 2| Densité

Soit $a \in \mathbb{R}$ et f la fonction donnée par : $f : \begin{array}{|ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{a}{x\sqrt{x}} & \text{si } x > 1 \end{cases} \end{array}$

(1). Déterminer a pour que f soit une densité de probabilité.

(2). Soit X une variable aléatoire de densité f.

(a). Calculer sa fonction de répartition F.

(b). Montrer que X n'admet pas d'espérance.

Sur l'ensemble du programme

Exercice| [1346] | 3| Densité

(1). Montrer que la fonction f donnée par : $f : \begin{array}{|ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{1}{|x|^3} & \text{si } |x| > 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$

est une densité de probabilité.

(2). On note X un variable aléatoire de densité f. Donner la fonction de répartition F de X.

(3). X admet-elle une espérance ? une variance ?

Exercice| [1348] | 4| Variable à densité

On considère la fonction f donnée par : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{-|x-20|} \end{array} \right.$

(1). Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et en calculer sa valeur.

(2). Déterminer le réel k tel que la fonction g définie par $g : x \longmapsto k \times f(x)$ soit une densité de probabilité.

(3). **(a).** Une entreprise vend de la farine conditionnée en sacs. Le poids en kilogrammes d'une sac est une variable aléatoire X admettant g comme densité de probabilité. Montrer que X admet une espérance.

(b). Déterminer la fonction de répartition de X.

(c). Quelle est la probabilité qu'un sac pèse plus de 20 kilos ?

(d). Quelle est la probabilité qu'un sac pèse moins de 21 kilos sachant qu'il pèse plus de 20 kilos.

Exercice| [3653] | 5| Endomorphisme défini par produit scalaire

Dans cet exercice, n désignera un entier naturel supérieur ou égal à 3.
On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique que l'on note $\langle x, y\rangle$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.
On considère deux vecteurs a et b de $\mathbb{R}^n$ tels que la famille (a, b) est une famille orthonormale de $\mathbb{R}^n$.
On définit alors sur $\mathbb{R}^n$ l'application f par : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ x & \longmapsto & \langle a, x\rangle\, b - \langle b, x\rangle\, a \end{array} \right.$

(1). Vérifier que f est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

(2). Déterminer $\mathrm{Ker}\,(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$. Donner une base de $\mathrm{Im}(f)$.

(3). Montrer que : $\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad \langle f(x), y\rangle = -\langle x, f(y)\rangle$.

Exercice| [1592] | 6| Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer que : $\left(\dfrac{a_1 + \ldots + a_n}{n}\right)^2 \leq \dfrac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n}$.

Exercice| [3300] | 7| Orthogonal d'un sous-espace

On munit $\mathbb{R}^4$ de son produit scalaire usuel, et on considère les vecteurs $v_1 = (0, 3, 1, -1)$ et $v_2 = (1, 2, -1, 1)$.
On note $F = \mathrm{Vect}\,(u_1, u_2)$.
Déterminer un système d'équations de $F^\perp$ puis une base orthonormée de $F^\perp$.

Exercice| [0887] | 8| Noyau et transposition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

(1). Rappeler la définition de $\mathrm{Ker}\,(A)$.

(2). Montrer que $\mathrm{Ker}\,\left({}^t\!AA\right) = \mathrm{Ker}\,(A)$.