Question de cours - 5 minutes - 2 points

Les énoncés ci-contre pourront vous être demandés explicitement avec toutes leurs hypothèses, avec ou sans démonstration:

- AL08 - Théorème 5 - Équivalence, libre et génératrice
- AL08 - Théorème 6 - Lien entre rang et cardinal de la famille
- AL08 - Théorème 11 - Rang et bases

Pratique calculatoire - 15/20 minutes - 8 points

Montrer qu'un sous-ensemble de $\mathbb{R}_n[x]$ ou de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel.

ou

Montrer qu'une famille est une base d'un espace vectoriel de dimension finie.

Thématique(s) de la semaine - 30 minutes - 10 points

Un ou plusieurs exercice(s) vous sera(ont) proposé(s) par votre interrogateur tels ceux proposés dans la banque d'exercices ci-après.
Ils porteront sur les chapitres et savoir-faire détaillés ci-dessous.

AL07 - Travailler dans les espaces usuels de dimension finie

- Reprise du programme précédent

AL08 - Travailler en dimension finie

- Dimension d'un espace vectoriel
- Dimension des espaces vectoriels usuels
- Taille des familles libres et génératrice en dimension finie
- Lien entre dimension finie, caractère libre, générateur et base
- Sous-espace engendré par une famille de vecteurs
- Rang d'une famille de vecteurs
- Théorème de la base incomplète et d'extraction de base
- Dimension d'un sous-espace vectoriel
- Caractérisation des bases par le rang
- Conservation du rang d'une famille par opération
- Digression sur l'échelonnement en colonnes

Exemples de savoir faire à maîtriser

- Reprise programme précédent
- Montrer qu'une famille est une base en dimension finie
- Déterminer le rang d'une famille de vecteurs
- Trouver une famille génératrice d'un sous-espace
- Obtenir une relation de dépendance pour une famille de vecteurs

Programme à venir

Reprise programme précédent | Applications linéaires (début)

Pour la pratique calculatoire

Exercice| [1406] | 1| Sous-espaces vectoriels

Soit $F = \left\{ M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}),\ \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, M = \begin{pmatrix} a & b & a+b \\ b & c & a \\ c & a & a+c \end{pmatrix} \right\}$.
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice| [4893] | 2| Sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[x]$

On considère le sous-ensemble F de $\mathbb{R}_3[x]$ donné par : $F = \left\{ P \in \mathbb{R}_3[x],\ \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$.
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[x]$.

Exercice| [4899] | 3| Base en dimension finie

(1). Écrire la matrice A de la famille $\mathcal{F} = ((1,1,1), (1,-1,2), (1,0,1))$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(2). Montrer que la famille $\mathcal{F} = ((1,1,1), (1,-1,2), (1,0,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice| [4900] | 4| Base en dimension finie

(1). Écrire la matrice de la famille $\mathcal{F} = (x \longmapsto 2x+1, x \longmapsto x^2 - x + 1, x \longmapsto x^2 - 1)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$.

(2). Montrer que la famille $\mathcal{F} = (x \longmapsto 2x+1, x \longmapsto x^2 - x + 1, x \longmapsto x^2 - 1)$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.

Sur l'ensemble du programme

Exercice| [1427] | 5| Sous-espaces vectoriels

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.
Le sous-ensemble F de E défini par : $F = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P(0) = P(2)\}$ est-il un sous-espace vectoriel de E ?

Exercice| [1192] | 6| Sous-espaces vectoriels

Soit $F = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ \exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} x = 2\alpha - 5\beta \\ y = -\alpha + 3\beta \\ z = 7\beta \end{cases} \right\}$.
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice| [1408] | 7| Sous-espaces vectoriels

Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, et soit G le sous-ensemble de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ défini par :

$$G = \{C \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}),\ AC = CA = 0\}$$

Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice| [1436] | 8| Liberté d'une famille de vecteur

Soit (u, v, w) une famille libre d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E.

(1). Montrer que la famille $(u+v, u-v, w+u)$ est également libre.

(2). La famille $(u-v, v-w, w-u)$ est-elle libre ?

Exercice| [0396] | 9| Famille de vecteurs

Soient u, v, w trois vecteurs linéairement indépendants d'un espace vectoriel E. Montrer que $u+v$, $u-v$ et $u-2v+w$ sont aussi indépendants.

Exercice| [1425] | 10| Sous-espaces vectoriels

Montrer que $F = \{P \in \mathbb{R}[X],\ 5P - (X-1)P' = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice| [2395] | 11| Espaces vectoriels

Soit $F = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P = XP' + P(0)\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice| [4894] | 12| Sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

On considère le sous-ensemble F de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ donné par :

$$F = \left\{ M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix},\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

(1). Montrer que F est un sous-espace vectoriel de F.

(2). Donner une famille génératrice de F.

(3). En déduire une base de F.

—-

Exercice| [0396] | 13| Famille de vecteurs

Soient u, v, w trois vecteurs linéairement indépendants d'un espace vectoriel E. Montrer que $u+v$, $u-v$ et $u-2v+w$ sont aussi indépendants.

Exercice| [2395] | 14| Espaces vectoriels

Soit $F = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P = XP' + P(0)\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice| [3407] | 15| Liberté d'une famille de polynômes

Soient $P_1 = X^3 - X^2 + X - 1$, $P_2 = X^2 - 1$, $P_3 = X^3 - 1$ et $P_4 = X^2 - X$.
Forment-ils une famille libre de $\mathbb{R}_3[X]$ et trouver une relation de dépendance le cas échéant ?

Exercice| [2398] | 16| Espaces vectoriels

Soit $F = \left\{ P \in \mathbb{R}_3[X], P(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$.
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ et en donner une famille génératrice.

Exercice| [3408] | 17| Base de polynômes

Montrer que $\left(1, X-1, (X-1)^2\right)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice| [2345] | 18| Base de polynômes

On se place dans $E = \mathbb{R}_3[X]$, et on considère la famille de polynôme $\mathcal{F} = \{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ où :

$$P_0 = X^2, \quad P_1 = 2X+1, \quad P_2 = X^2 + X + 1 \quad \text{et} \quad P_3 = X^3 - X + 1$$

(1). Montrer que la famille $\mathcal{F}$ est une base de E.

(2). Quelles sont les coordonnées dans $\mathcal{F}$ du polynôme $P = 2X^3 - 6X^2 + X - 1$?

Exercice| [3421] | 19| Compléter une famille

Soit E un $\mathbb{K}$-espace-vectoriel de dimension 3 dont on note $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_3)$ une base.
Soit $\varepsilon_1 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$ et $\varepsilon_2 = e_2 + e_3$.
Montrer que la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est libre et compléter celle-ci en une base de E.

Exercice| [2182] | 20| Sous-espace de $\mathbb{R}^4$

On considère $H = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x - y + z = 0\}$.

(1). Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

(2). Déterminer une famille génératrice de H.

Exercice| [3474] | 21| Sous-espaces vectoriels $\mathbb{R}^4$

On considère le sous-ensemble F de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ 2x - y + 3z + t = 0 \text{ et } x - y - z + t = 0\}$$

(1). Le vecteur $(-1,2,1,-2)$ appartient-il à F ?

(2). Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

(3). Donner une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$.

Exercice| [3476] | 22| Combinaison linéaire

Montrer que la famille $\mathcal{F}$ suivante est une famille liée de $\mathbb{R}^4$, et déterminer ensuite une ou des relations de dépendance entre les vecteurs de $\mathcal{F}$ afin d'extraire une base de $\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})$.

$\mathcal{F} = (e_1, \ldots, e_6)$ où $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $e_4 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $e_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $e_6 = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Exercice| [3477] | 23| Combinaison linéaire

Soient : $P_1 = 2 + X + 2X^2 - X^3$, $P_2 = -3 + 5X + 6X^2 - 2X^3$, $P_3 = 2 - X + 3X^2 + X^3$ et $P_4 = 1 - 4X - 2X^2 + 3X^3$, $P_5 = 1 + X - X^2 + 2X^3$ et $P_6 = -2 + 2X + 4X^2$.

On note $F = \mathrm{Vect}\,(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6)$.

(1). Déterminer $\dim(F)$.

(2). Déterminer une base de F.

Exercice| [0401] | 24| Famille de vecteurs

Trouver une base et la dimension du sous-espace W de $\mathbb{K}_3[X]$ engendré par les polynômes :

$P_1 = X^3 - 2X^2 + 4X + 1 \quad P_2 = 2X^3 - 3X^2 + 9X - 1 \quad P_3 = X^3 + 6X - 5 \quad P_4 = 2X^3 - 5X^2 + 7X + 5$