Question de cours | Restitution de cours | Situation classique | 5 minutes | 2 points

Les énoncés ci-contre pourront vous être demandés explicitement avec toutes leurs hypothèses, avec ou sans démonstration:

- AL14 - Définitions 1 & 3 - | Éléments propres d'un endomorphisme | Sous-espace propre d'un endomorphisme
- AL14 - Théorème 11 - Condition nécessaire et suffisante de diagonalisation | Cas endomorphisme
- AL14 - Théorème 14 - Base de vecteurs propres par concaténation

Pratique calculatoire | 20 minutes | 8 points

Diagonaliser de manière autonome une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

On privilégiera la recherche d'éléments de $E_\lambda(A) = \operatorname{Ker}\,(A - \lambda \mathrm{I}_3)$ par combinaison linéaire nulle des colonnes de la matrice avant de se « rabattre » sur la résolution du système $(A - \lambda \mathrm{I}_3 | 0)$.

Thématique(s) de la semaine | 30 minutes | 10 points

AL14 | Diagonalisation de matrices ou d'endomorphismes | ATTENTION : aspect matriciel ET endomorphisme

- Reprise programme précédent
- Aspect « endomorphisme » de la diagonalisation

Exemples de savoir faire à maîtriser

- Reprise programme précédent
- Montrer qu'un vecteur est un vecteur propre pour un endomorphisme
- Montrer qu'un réel appartient au spectre d'un endomorphisme
- Former une base diagonalisante pour un endomorphisme

Programme à venir...

Reprise programme à l'identique

Pour la pratique calculatoire

EX. 1 | Réf. 3956

Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.
Pour chacune d'entre elles, dire si elles sont diagonalisables dans $\mathbb{R}$ et le cas échéant donner une matrice inversible P et une matrice diagonale D telle que $D = P^{-1}BP$.

EX. 2 | Réf. 4230

Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer les valeurs propres de A.
2. Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres.
3. Que peut-on en conclure ?

EX. 3 | Réf. 4228

Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

1. Déterminer les valeurs propres de A.
2. Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres.
3. Que peut-on en conclure ?

Sur l'ensemble du programme

EX. 4 | Réf. 4112

On considère l'application $u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & (X-1)P' \end{array} \right.$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Déterminer les valeurs propres de u puis une base de chaque sous-espaces propres associés.

EX. 5 | Réf. 3962

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le noyau de f et le rang de f. Qu'en déduire pour f en terme de valeur propre ?
2. Montrer que : $\begin{pmatrix} \lambda \neq 0 \\ \text{est telle que} \\ \lambda \in \operatorname{sp}(f) \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\lambda^2 - \lambda - (n-1) = 0\right)$
3. En déduire que f est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Préciser ses valeurs propres, leurs multiplicités et les sous-espaces propres associés.

EX. 6 | Réf. 4051

On définit l'application $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_4[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & (1-X)P(0) + XP(1) \end{array} \right.$.

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}_4[X]\right)$.
2. Déterminer $f \circ f$. Qu'en conclure pour f ?
3. Déterminer alors les éléments caractéristiques de f.

EX. 7 | Réf. 4086

On note $\mathcal{B} = \left(1, X, X^2\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et on considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. La matrice A est-elle inversible ? Qu'en déduire pour f ?
2. On considère $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X],\ f(P) = 2P\}$.
   - **a.** Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.
   - **b.** Donner une base et la dimension de F.

EX. 8 | Réf. 3960

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et les matrices colonnes $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Quel est le rang de A ? Comment interpréter ce résultat en terme de valeur propre ?
2. Calculer AX_1 et AX_2.
3. La matrice A est-elle diagonalisable ?

EX. 9 | Réf. 4111

1. Déterminer $a \in \mathbb{R}$ pour que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ 0 & a+1 & 3 \end{pmatrix}$ admette 2 pour valeur propre.
2. Déterminer alors une base de $E_2(A)$ dans ce cas.
3. Toujours dans le cas où 2 est valeur propre de A, déterminer les autres valeurs propres et sous-espaces propres de A.

EX. 10 | Réf. 5189

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que -4 est valeur propre de A puis déterminer un vecteur propre associé à cette valeur propre.
2. Calculer $A \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Qu'en déduire pour A ?
3. Donner une autre valeur propre pour A, et un vecteur propre associé.