Question de cours - 5 minutes - 2 points

Les énoncés ci-contre pourront vous être demandés explicitement avec toutes leurs hypothèses, avec ou sans démonstration:

- PR11 - Définition 1 & Théorèmes 1 et 2 - Loi uniforme | Schéma/graphiques compris
- PR11 - Définition 2 & Théorème 3 & Proposition 1 - Loi exponentielle | Schéma/graphiques compris
- PR11 - Définition 3 & Théorème 5 & Proposition 2 - Loi normale centrée réduite | Schéma/graphiques compris

Pratique calculatoire - 15/20 minutes - 8 points

Montrer qu'une fonction est une densité de probabilité

ou

Obtenir la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité à partir d'une densité de probabilité

Thématique(s) de la semaine - 30 minutes - 10 points

Un ou plusieurs exercice(s) vous sera(ont) proposé(s) par votre interrogateur tels ceux proposés dans la banque d'exercices ci-après.
Ils porteront sur les chapitres et savoir-faire détaillés ci-dessous.

PR10 - Variables aléatoires à densité

- Reprise programme précédent
- Moments d'une variable aléatoire à densité
- Inégalités et Markov de Bienaymé-Tchebychev

PR11 - Lois à densité usuelle

- Loi uniforme
- Loi exponentielle
- Loi normale centrée r´eduite
- Loi de Laplace-Gauss

Exemples de savoir faire à maîtriser

- Reprise du programme précédent
- Montrer qu'une variable aléatoire à densitádmet une espérance et/ou une variance
- Déterminer l'espérance d'une variable aléatoire à densité
- Déterminer la variance d'une variable aléatoire à densité
- Manipuler les lois à densité usuelles

Programme à venir

Variables aléatoires à densite | Produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$

Pour la pratique calculatoire

Exercice| [1490] | 1| Densité et fonction de répartition

(1). Montrer que la fonction f donnée par : $f : \begin{array}{|ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{1}{2}(x+1) & \text{si } x \in [-1;0[\\ \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \end{array}$

est une densité de probabilité.

(2). On note X un variable aléatoire de densité f. Donner la fonction de répartition F de X.

Exercice| [1347] | 2| Densité

Soit $a \in \mathbb{R}$ et f la fonction donnée par : $f : \begin{array}{|ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{a}{x\sqrt{x}} & \text{si } x > 1 \end{cases} \end{array}$

(1). Déterminer a pour que f soit une densité de probabilité.

(2). Soit X une variable aléatoire de densité f.

(a). Calculer sa fonction de répartition F.

(b). Montrer que X n'admet pas d'espérance.

Sur l'ensemble du programme

Exercice| [1346] | 3| Densité

(1). Montrer que la fonction f donnée par : $f : \begin{array}{|ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{1}{|x|^3} & \text{si } |x| > 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$

est une densité de probabilité.

(2). On note X un variable aléatoire de densité f. Donner la fonction de répartition F de X.

(3). X admet-elle une espérance ? une variance ?

Exercice| [1348] | 4| Variable à densité

On considère la fonction f donnée par : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{-|x-20|} \end{array} \right.$

(1). Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et en calculer sa valeur.

(2). Déterminer le réel k tel que la fonction g définie par $g : x \longmapsto k \times f(x)$ soit une densité de probabilité.

(3). **(a).** Une entreprise vend de la farine conditionnée en sacs. Le poids en kilogrammes d'une sac est une variable aléatoire X admettant g comme densité de probabilité. Montrer que X admet une espérance.

(b). Déterminer la fonction de répartition de X.

(c). Quelle est la probabilité qu'un sac pèse plus de 20 kilos ?

(d). Quelle est la probabilité qu'un sac pèse moins de 21 kilos sachant qu'il pèse plus de 20 kilos.

Exercice| [1350] | 5| Densité de probabilité

(1). Montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F : x \longmapsto \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité X.

(2). Déterminer une densité f de la variable aléatoire X.

(3). Montrer que X admet une espérance et que $\mathbb{E}(X) = 0$.