Question de cours - 5 minutes - 2 points

Les énoncés ci-contre pourront vous être demandés explicitement avec toutes leurs hypothèses, avec ou sans démonstration:

- AL07 - Théorème 1 - Rajout et suppression d'éléments dans des familles libres et liées
- AL07 - Théorème 2 - Famille de polynômes de degrés échelonnés
- AL07 - Théorème 3 - Bases canoniques des espaces usuels

Pratique calculatoire - 15/20 minutes - 8 points

Montrer qu'un sous-ensemble de $\mathbb{R}_n[X]$ ou de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel.

Thématique(s) de la semaine - 30 minutes - 10 points

Un ou plusieurs exercice(s) vous sera(ont) proposé(s) par votre interrogateur tels ceux proposés dans la banque d'exercices ci-après.
Ils porteront sur les chapitres et savoir-faire détaillés ci-dessous.

AL07 - Travailler dans les espaces usuels de dimension finie

- Notion d'espace vectoriel : extension du cas $\mathbb{R}^n$ à $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.
- Sous-espace vectoriel
- Combinaison linéaire de vecteurs
- Famille libre
- Famille génératrice
- Base d'un espace vectoriel
- Représentation matricielle d'une famille de vecteurs

Exemples de savoir faire à maîtriser

- Montrer qu'un sous-ensemble est un sous-espace vectoriel
- Montrer qu'un vecteur est combinaison linéaire d'éléments d'une famille de vecteurs
- Montrer qu'une famille est une famille libre en utilisant la définition
- Montrer qu'une famille est une famille génératrice en utilisant la définition

Programme à venir

Reprise programme précédent | Travailler en dimension finie

Programme à venir

Espaces vectoriels | Espaces vectoriels usuels | Dimension finie

Pour la pratique calculatoire

Exercice| [1406] | 1| Sous-espaces vectoriels

Soit $F = \left\{ M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}),\ \exists\,(a,b,c) \in \mathbb{R}^3, M = \begin{pmatrix} a & b & a+b \\ b & c & a \\ c & a & a+c \end{pmatrix} \right\}$.
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Sur l'ensemble du programme

Exercice| [1427] | 2| Sous-espaces vectoriels

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.
Le sous-ensemble F de E défini par : $F = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P(0) = P(2)\}$ est-il un sous-espace vectoriel de E ?

Exercice| [1192] | 3| Sous-espaces vectoriels

Soit $F = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; \exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\quad \left\{ \begin{array}{l} x = 2\alpha - 5\beta \\ y = -\alpha + 3\beta \\ z = 7\beta \end{array} \right. \right\}$.
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice| [1408] | 4| Sous-espaces vectoriels

Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, et soit G le sous-ensemble de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ défini par :

$$G = \{C \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}),\ AC = CA = 0\}$$

Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice| [1436] | 5| Liberté d'une famille de vecteur

Soit (u,v,w) une famille libre d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E.

(1). Montrer que la famille $(u+v, u-v, w+u)$ est également libre.

(2). La famille $(u-v, v-w, w-u)$ est-elle libre ?

Exercice| [0396] | 6| Famille de vecteurs

Soient u, v, w trois vecteurs linéairement indépendants d'un espace vectoriel E. Montrer que $u+v$, $u-v$ et $u-2v+w$ sont aussi indépendants.

Exercice| [1425] | 7| Sous-espaces vectoriels

Montrer que $F = \{P \in \mathbb{R}[X],\, 5P - (X-1)P' = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice| [2395] | 8| Espaces vectoriels

Soit $F = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P = XP' + P(0)\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice| [4894] | 9| Sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

On considère le sous-ensemble F de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ donné par :

$$F = \left\{ M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix},\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

(1). Montrer que F est un sous-espace vectoriel de F.

(2). Donner une famille génératrice de F.

(3). En déduire une base de F.

Exercice| [3407] | 10| Liberté d'une famille de polynômes

Soient $P_1 = X^3 - X^2 + X - 1$, $P_2 = X^2 - 1$, $P_3 = X^3 - 1$ et $P_4 = X^2 - X$.
Forment-ils une famille libre de $\mathbb{R}_3[X]$ et trouver une relation de dépendance le cas échéant ?

Exercice| [2398] | 11| Espaces vectoriels

Soit $F = \left\{ P \in \mathbb{R}_3[X], P(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$.
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ et en donner une famille génératrice.

Exercice| [3408] | 12| Base de polynômes

Montrer que $\left(1, X-1, (X-1)^2\right)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice| [2345] | 13| Base de polynômes

On se place dans $E = \mathbb{R}_3[X]$, et on considère la famille de polynôme $\mathcal{F} = \{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ où :

$$P_0 = X^2, \quad P_1 = 2X + 1, \quad P_2 = X^2 + X + 1 \qquad \text{et} \qquad P_3 = X^3 - X + 1$$

(1). Montrer que la famille $\mathcal{F}$ est une base de E.

(2). Quelles sont les coordonnées dans $\mathcal{F}$ du polynôme $P = 2X^3 - 6X^2 + X - 1$?

Exercice| [3409] | 14| Sous-espace de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

On note $F = \left\{ M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}),\quad \exists\,(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\quad M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \alpha \\ \beta & 2\alpha & \beta \\ \alpha & \beta & \alpha \end{pmatrix} \right\}$.
Montrer que F est un un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et en donner une base.

Exercice| [3410] | 15| Famille de matrices

(1). Montrer que les matrices $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ forment une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

(2). Déterminer alors les coordonnées de $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$ dans cette base.

Exercice| [3411] | 16| Sous-espaces engendrés

Dans l'espace vectoriel $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on considère les matrices :
$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$, et $B_2 = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
Montrer que $\mathrm{Vect}\,(A_1, B_1) = \mathrm{Vect}\,(A_2, B_2)$.