

Question de cours | Restitution de cours | Situation classique | 5 minutes | 2 points

Les énoncés ci-contre pourront vous être demandés explicitement avec toutes leurs hypothèses, avec ou sans démonstration:

- AL14 - Définitions 2 & 3 - | Éléments propres d'une matrice | Sous-espace propre d'une matrice
- AL14 - Théorème 11 - Condition nécessaire et suffisante de diagonalisation | Cas matriciel
- AL14 - Théorème 12 - Valeurs propres d'une matrice 2×2

Pratique calculatoire | 20 minutes | 8 points

Montrer qu'un réel λ donné est valeur propre ou non d'une matrice de $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par « contemplation » ou par l'étude de l'inversibilité de la matrice $A - \lambda I_3$, puis déterminer une base du sous-espace propre associé.

et

Rechercher les valeurs propres (uniquement) d'une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par discussion sur λ du rang de $A - \lambda I_3$.

On privilégiera la recherche d'éléments de $E_\lambda(A) = \text{Ker}(A - \lambda I_3)$ par combinaison linéaire nulle des colonnes de la matrice avant de se « rabattre » sur la résolution du système $(A - \lambda I_3|0)$.

Thématique(s) de la semaine | 30 minutes | 10 points**AL14 | Diagonalisation de matrices ou d'endomorphismes | ATTENTION : uniquement aspect matriciel**

- Reprise programme précédent

Exemples de savoir faire à maîtriser

- Reprise programme précédent

Programme à venir...

Diagonalisation des endomorphismes | Intégrales impropres

Pour la pratique calculatoire**EX. 1 | Réf. 5189**

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que -4 est valeur propre de A puis déterminer un vecteur propre associé à cette valeur propre.
2. Calculer $A \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Qu'en déduire pour A ?
3. Donner une autre valeur propre pour A , et un vecteur propre associé.

EX. 2 | Réf. 5187

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une base de $\text{Ker}(A - I_3)$. Qu'en déduit-on?
2. 0 est-elle valeur propre de A ?
3. Pourquoi 4 est valeur propre de A ? Donner alors un élément de $E_4(A)$.

EX. 3 | Réf. 5188

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que 3 est valeur propre de A puis déterminer vecteur propre associé à cette valeur propre.
2. A-t-on $-2 \in \text{sp}(A)$? Si oui, déterminer une base du sous-espace propre $E_{-2}(A)$.
3. A-t-on $2 \in \text{sp}(A)$? Si oui, déterminer une base du sous-espace propre $E_{-2}(A)$.

EX. 4 | Réf. 4228

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

1. Déterminer les valeurs propres de A .
2. Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres.
3. Que peut-on en conclure?

EX. 5 | Réf. 4230

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer les valeurs propres de A .
2. Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres.
3. Que peut-on en conclure?

Sur l'ensemble du programme

EX. 6 | Réf. 4111

1. Déterminer $a \in \mathbb{R}$ pour que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ 0 & a+1 & 3 \end{pmatrix}$ admette 2 pour valeur propre.
2. Déterminer alors une base de $E_2(A)$ dans ce cas.
3. Toujours dans le cas où 2 est valeur propre de A , déterminer les autres valeurs propres et sous-espaces propres de A .

EX. 7 | Réf. 3957

Soient la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ et les matrices colonnes $X_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que X_1 , X_2 et X_3 sont des vecteurs propres de la matrice A .
2. La matrice A est-elle diagonalisable dans \mathbb{R} et le cas échéant donner une matrice inversible P et une matrice diagonale D telle que $D = P^{-1}AP$.
3. La matrice A est-elle inversible?

EX. 8 | Réf. 3960

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et les matrices colonnes $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Quel est le rang de A ? Comment interpréter ce résultat en terme de valeur propre?
2. Calculer AX_1 et AX_2 .
3. La matrice A est-elle diagonalisable?

EX. 9 | Réf. 3956

Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

Pour chacune d'entre elles, dire si elles sont diagonalisables dans \mathbb{R} et le cas échéant donner une matrice inversible P et une matrice diagonale D telle que $D = P^{-1}BP$.

EX. 10 | Réf. 3958

Soit $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de B .
2. Déterminer le polynôme caractéristique de B , puis les valeurs propres de B .
3. En déduire que B est diagonalisable dans \mathbb{R} , et donner une matrice inversible P et une matrice diagonale D telle que $D = P^{-1}BP$.

EX. 11 | Réf. 4112

On considère l'application $u : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto (X-1)P' \end{cases}$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Déterminer les valeurs propres de u puis une base de chaque sous-espaces propres associés.

EX. 12 | Réf. 3962

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$. Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^n dont la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^n est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le noyau de f et le rang de f . Qu'en déduire pour f en terme de valeur propre?
2. Montrer que : $\begin{pmatrix} \lambda \neq 0 \\ \text{est telle que} \\ \lambda \in \text{sp}(f) \end{pmatrix} \Leftrightarrow (\lambda^2 - \lambda - (n-1) = 0)$
3. En déduire que f est diagonalisable dans \mathbb{R} . Préciser ses valeurs propres, leurs multiplicités et les sous-espaces propres associés.

EX. 13 | Réf. 4051

On définit l'application $f : \begin{cases} \mathbb{R}_4[X] & \longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto (1-X)P(0) + XP(1) \end{cases}$.

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_4[X])$.
2. Déterminer $f \circ f$. Qu'en conclure pour f ?
3. Déterminer alors les éléments caractéristiques de f .

EX. 14 | Réf. 4086

On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et on considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dont la matrice dans

la base \mathcal{B} est : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. La matrice A est-elle inversible? Qu'en déduire pour f ?
2. On considère $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X], f(P) = 2P\}$.
 - a. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.
 - b. Donner une base et la dimension de F .