Question de cours - 5 minutes - 2 points

Les énoncés ci-contre pourront vous être demandés explicitement avec toutes leurs hypothèses, avec ou sans démonstration:

- PR10 - Théorème 1 - Lien entre fonction de répartition et densité
- PR10 - Théorème 2 - Théorème caractéristique pour les densités
- PR10 - Théorème 3 - Probabilités et variables aléatoires à densité

Pratique calculatoire - 15/20 minutes - 8 points

Montrer qu'une fonction est une densité de probabilité

Thématique(s) de la semaine - 30 minutes - 10 points

Un ou plusieurs exercice(s) vous sera(ont) proposé(s) par votre interrogateur tels ceux proposés dans la banque d'exercices ci-après.
Ils porteront sur les chapitres et savoir-faire détaillés ci-dessous.

AL15 - Diagonalisation de matrices et d'endomorphismes

- Reprise programme précédent

PR09 - Des aires, des intégrales et des probabilités

- Pour culture

PR10 - Variables aléatoires à densité

- Fonction de répartition
- Variables aléatoires à densité
- Lien densité et fonction de répartition
- Fonction densité
- Probabilités et variable aléatoire réelle à densité

Exemples de savoir faire à maîtriser

- Reprise du programme précédent
- Montrer qu'une fonction est une fonction de répartition
- Montrer qu'une fonction est une densité de probabilité

Programme à venir

Moments d'une variable aléatoire à densité | Lois à densité usuelles

Pour la pratique calculatoire

Exercice| [1490] | 1| Densité et fonction de répartition

(1). Montrer que la fonction f donnée par :
$$f:\left|\begin{array}{rcl}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x<-1\\ \frac{1}{2}(x+1) & \text{si } x\in[-1;0[\\ \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x\geq 0\end{cases}\end{array}\right.$$
est une densité de probabilité.

(2). On note X un variable aléatoire de densité f. Donner la fonction de répartition F de X.

Sur l'ensemble du programme

Exercice| [1346] | 2| Densité

(1). Montrer que la fonction f donnée par :
$$f:\left|\begin{array}{rcl}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{1}{|x|^3} & \text{si } |x|>1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}\end{array}\right.$$
est une densité de probabilité.

(2). On note X un variable aléatoire de densité f. Donner la fonction de répartition F de X.

(3). X admet-elle une espérance ? une variance ?

Exercice| [1347] | 3| Densité

Soit $a\in\mathbb{R}$ et f la fonction donnée par :
$$f:\left|\begin{array}{rcl}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x\leq 1\\ \frac{a}{x\sqrt{x}} & \text{si } x>1\end{cases}\end{array}\right.$$

(1). Déterminer a pour que f soit une densité de probabilité.

(2). Soit X une variable aléatoire de densité f.

  (a). Calculer sa fonction de répartition F.

  (b). Montrer que X n'admet pas d'espérance.

Exercice| [1348] | 4| Variable à densité

On considère la fonction f donnée par :
$$f:\left|\begin{array}{rcl}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{-|x-20|}\end{array}\right.$$

(1). Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et en calculer sa valeur.

(2). Déterminer le réel k tel que la fonction g définie par $g : x \longmapsto k \times f(x)$ soit une densité de probabilité.

(3). **(a).** Une entreprise vend de la farine conditionnée en sacs. Le poids en kilogrammes d'une sac est une variable aléatoire X admettant g comme densité de probabilité. Montrer que X admet une espérance.

(b). Déterminer la fonction de répartition de X.

(c). Quelle est la probabilité qu'un sac pèse plus de 20 kilos ?

(d). Quelle est la probabilité qu'un sac pèse moins de 21 kilos sachant qu'il pèse plus de 20 kilos.

Exercice| [1350] | 5| Densité de probabilité

(1). Montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F : x \longmapsto \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité X.

(2). Déterminer une densité f de la variable aléatoire X.

(3). Montrer que X admet une espérance et que $\mathbb{E}(X) = 0$.

Exercice| [4112] | 6| Réduction d'un endomorphisme

On considère l'application $u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & (X-1)P' \end{array} \right.$.

(1). Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

(2). Déterminer la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

(3). Déterminer les valeurs propres de u puis une base de chaque sous-espaces propres associés.

Exercice| [3960] | 7| Maîtriser son cours

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et les matrices colonnes $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(1). Quel est le rang de A ? Comment interpréter ce résultat en terme de valeur propre ?

(2). Calculer AX_1 et AX_2.

(3). La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice| [3956] | 8| Réduction de matrices 3×3

Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

Pour chacune d'entre elles, dire si elles sont diagonalisables dans $\mathbb{R}$ et le cas échéant donner une matrice inversible P et une matrice diagonale D telle que $D = P^{-1}BP$.

Exercice| [3958] | 9| Réduction d'une matrice 4×4

Soit $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

(1). Montrer que $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de B.

(2). En étudiant le rang de la matrice $\lambda \mathrm{I}_4 - A$ en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$, déterminer les valeurs propres de B.

(3). En déduire que B est diagonalisable dans $\mathbb{R}$, et donner une matrice inversible P et une matrice diagonale D telle que $D = P^{-1}BP$.

Exercice| [3962] | 10| Diagonalisation d'une matrice $n \times n$

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1). Déterminer le noyau de f et le rang de f. Qu'en déduire pour f en terme de valeur propre ?

(2). Montrer que : $\left(\begin{array}{c} \lambda \neq 0 \\ \text{est telle que} \\ \lambda \in \mathrm{sp}(f) \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\lambda^2 - \lambda - (n-1) = 0 \right)$

(3). En déduire que f est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Préciser ses valeurs propres, leurs multiplicités et les sous-espaces propres associés.