Question de cours | Restitution de cours | Situation classique | 5 minutes | 2 points

Les énoncés ci-contre pourront vous être demandés explicitement avec toutes leurs hypothèses, avec ou sans démonstration:

- AL14 - Définitions 2 & 3 - | Éléments propres d'une matrice | Sous-espace propre d'une matrice
- AL14 - Théorème 11 - Condition nécessaire et suffisante de diagonalisation | Cas matriciel
- AL14 - Théorème 12 - Valeurs propres d'une matrice 2×2

Pratique calculatoire | 20 minutes | 8 points

Montrer qu'un réel λ donné est valeur propre ou non d'une matrice de $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ par « contemplation » ou par l'étude de l'inversibilité de la matrice $A - \lambda \mathrm{I}_3$, puis déterminer une base du sous-espace propre associé.

et

Rechercher les valeurs propres (uniquement) d'une matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ par discussion sur λ du rang de $A - \lambda \mathrm{I}_3$.

On privilégiera la recherche d'éléments de $E_\lambda(A) = \mathrm{Ker}\ (A - \lambda \mathrm{I}_3)$ par combinaison linéaire nulle des colonnes de la matrice avant de se « rabattre » sur la résolution du système $(A - \lambda \mathrm{I}_3|0)$.

Thématique(s) de la semaine | 30 minutes | 10 points

AL14 | Diagonalisation de matrices ou d'endomorphismes | ATTENTION : uniquement aspect matriciel

- Éléments propres d'une matrice
- Caractérisation des valeurs propres par le rang de $A - \lambda \mathrm{I}_n$
- Exemples d'obtention d'éléments propres à partir des définitions pour les matrices
- Utilisation d'un polynôme annulateur pour la recherche de valeurs propres | Résultat non exigible
- Liberté d'une famille de vecteurs propres
- Cardinal du spectre
- Matrice diagonalisable
- Théorème de diagonalisation pour les matrices
- Somme des sous-espaces propres pour les matrices
- Cas particulier des matrices 2×2

Exemples de savoir faire à maîtriser

- Montrer qu'un réel est une valeur propre
- Montrer qu'un vecteur est un vecteur propre
- Déterminer les valeurs propres d'une matrice A par discussion sur le rang de la matrice $\lambda \mathrm{I}_n - A$
- Déterminer une base d'un sous-espace propre
- Utiliser un polynôme annulateur pour déterminer les valeurs propres

Programme à venir...

Reprise programme à l'identique

Pour la pratique calculatoire

EX. 1 | Réf. 5189

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que -4 est valeur propre de A puis déterminer un vecteur propre associé à cette valeur propre.
2. Calculer $A \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Qu'en déduire pour A ?
3. Donner une autre valeur propre pour A, et un vecteur propre associé.

EX. 2 | Réf. 5187

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\ (A - \mathrm{I}_3)$. Qu'en déduit-on ?
2. 0 est-elle valeur propre de A ?
3. Pourquoi 4 est valeur propre de A ? Donner alors un élément de $E_4(A)$.

EX. 3 | Réf. 5188

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que 3 est valeur propre de A puis déterminer vecteur propre associé à cette valeur propre.
2. A-t-on $-2 \in \mathrm{sp}(A)$? Si oui, déterminer une base du sous-espace propre $E_{-2}(A)$.
3. A-t-on $2 \in \mathrm{sp}(A)$? Si oui, déterminer une base du sous-espace propre $E_{-2}(A)$.

EX. 4 | Réf. 4228

Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

1. Déterminer les valeurs propres de A.
2. Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres.
3. Que peut-on en conclure ?

EX. 5 | Réf. 4230

Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer les valeurs propres de A.
2. Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres.
3. Que peut-on en conclure ?

Sur l'ensemble du programme

EX. 6 | Réf. 4111

1. Déterminer $a \in \mathbb{R}$ pour que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ 0 & a+1 & 3 \end{pmatrix}$ admette 2 pour valeur propre.
2. Déterminer alors une base de $E_2(A)$ dans ce cas.
3. Toujours dans le cas où 2 est valeur propre de A, déterminer les autres valeurs propres et sous-espaces propres de A.

EX. 7 | Réf. 3957

Soient la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ et les matrices colonnes $X_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que X_1, X_2 et X_3 sont des vecteurs propres de la matrice A.
2. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et le cas échéant donner une matrice inversible P et une matrice diagonale D telle que $D = P^{-1}AP$.
3. La matrice A est-elle inversible ?

EX. 8 | Réf. 3960

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et les matrices colonnes $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Quel est le rang de A ? Comment interpréter ce résultat en terme de valeur propre ?
2. Calculer AX_1 et AX_2.
3. La matrice A est-elle diagonalisable ?

EX. 9 | Réf. 3956

Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.
Pour chacune d'entre elles, dire si elles sont diagonalisables dans $\mathbb{R}$ et le cas échéant donner une matrice inversible P et une matrice diagonale D telle que $D = P^{-1}BP$.

EX. 10 | Réf. 3958

Soit $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de B.
2. Déterminer le polynôme caractéristique de B, puis les valeurs propres de B.
3. En déduire que B est diagonalisable dans $\mathbb{R}$, et donner une matrice inversible P et une matrice diagonale D telle que $D = P^{-1}BP$.