Question de cours - 5 minutes - 2 points

Les énoncés ci-contre pourront vous être demandés explicitement avec toutes leurs hypothèses, avec ou sans démonstration:

- AL14 - Définitions 1-3 - |Éléments propres d'un endomorphisme | Sous-espace propre d'un endomorphisme
- AL14 - Propositioj 4 & Théorème 10 - Stabilité d'un sous-espace propre | Somme de deux sous-espaces propres
- AL14 - Théorème 11 - Condition nécessaire et suffisante de diagonalisation | Cas endomorphisme

Pratique calculatoire - 15/20 minutes - 8 points

Montrer qu'un réel λ donné est valeur propre ou non d'une matrice de $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ par « contemplation » ou par l'étude de l'inversibilité de la matrice $A - \lambda \mathrm{I}_3$, puis déterminer une base du sous-espace propre associé.

$\boxed{\text{et}}$

Rechercher les valeurs propres (uniquement) d'une matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ par discussion sur λ du rang de $A - \lambda \mathrm{I}_3$.

On privilégiera la recherche d'éléments de $E_\lambda(A) = \mathrm{Ker}\ (A - \lambda \mathrm{I}_3)$ par combinaison linéaire nulle des colonnes de la matrice avant de se « rabattre » sur la résolution du système $(A - \lambda \mathrm{I}_3 | 0)$.

Thématique(s) de la semaine - 30 minutes - 10 points

Un ou plusieurs exercice(s) vous sera(ont) proposé(s) par votre interrogateur tels ceux proposés dans la banque d'exercices ci-après.
Ils porteront sur les chapitres et savoir-faire détaillés ci-dessous.

AL14 | Diagonalisation de matrices ou d'endomorphismes

- Éléments propres d'une matrice ou d'un endomorphisme
- Caractérisation des valeurs propres par le rang de $A - \lambda \mathrm{I}_n$ ou l'injectivité de $f - \mathrm{I}_E$
- Utilisation d'un polynôme annulateur pour la recherche de valeurs propres | Résultat non exigible
- Liberté d'une famille de vecteurs propres
- Cardinal du spectre
- Matrice et endomorphismes diagonalisables
- Théorème de diagonalisation
- Lien matrice diagonalisavble/Endomorphisme diagonalisable
- Somme des sous-espaces propres pour les matrices et les endomorphismes
- Cas particulier des matrices 2×2

Exemples de savoir faire à maîtriser

- Montrer qu'un réel est une valeur propre
- Montrer qu'un vecteur est un vecteur propre
- Déterminer les valeurs propres d'une matrice A par discussion sur le rang de la matrice $\lambda \mathrm{I}_n - A$
- Déterminer une base d'un sous-espace propre
- Utiliser un polynôme annulateur pour déterminer les valeurs propres
- Diagonaliser un endomorphisme/une matrice
- Rechercher une base diagonalisante pour un endomorphisme

Programme à venir

Reprise programme actuel | Diagonalisation des endomorphismes

Pour la pratique calculatoire

Exercice| [5189] | 1| Éléments propres d'une matrice 3×3

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(1). Montrer que -4 est valeur propre de A puis déterminer un vecteur propre associé à cette valeur propre.

(2). Calculer $A \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Qu'en déduire pour A ?

(3). Donner une autre valeur propre pour A, et un vecteur propre associé.

Exercice| [5187] | 2| Éléments propres d'une matrice 3×3

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(1). Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\ (A - \mathrm{I}_3)$. Qu'en déduit-on ?

(2). 0 est-elle valeur propre de A ?

(3). Pourquoi 4 est valeur propre de A ? Donner alors un élément de $E_4(A)$.

Exercice| [5188] | 3| Éléments propres d'une matrice 3×3

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

(1). Montrer que 3 est valeur propre de A puis déterminer vecteur propre associé à cette valeur propre.

(2). A-t-on $-2 \in \mathrm{sp}(A)$? Si oui, déterminer une base du sous-espace propre $E_{-2}(A)$.

(3). A-t-on $2 \in \mathrm{sp}(A)$? Si oui, déterminer une base du sous-espace propre $E_{-2}(A)$.

Exercice| [4228] | 4| Recherche d'éléments propres

Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(1). Déterminer les valeurs propres de A.

(2). Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres.

(3). Que peut-on en conclure ?

Exercice| [4230] | 5| Recherche d'éléments propres

Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(1). Déterminer les valeurs propres de A.

(2). Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres.

(3). Que peut-on en conclure ?

Sur l'ensemble du programme

Exercice| [4112] | 6| Réduction d'un endomorphisme

On considère l'application $u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & (X-1)P' \end{array} \right.$.

(1). Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

(2). Déterminer la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

(3). Déterminer les valeurs propres de u puis une base de chaque sous-espaces propres associés.

Exercice| [3962] | 7| Diagonalisation d'une matrice $n \times n$

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1). Déterminer le noyau de f et le rang de f. Qu'en déduire pour f en terme de valeur propre ?

(2). Montrer que : $\left(\begin{array}{c} \lambda \neq 0 \\ \text{est telle que} \\ \lambda \in \mathrm{sp}(f) \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\lambda^2 - \lambda - (n-1) = 0 \right)$

(3). En déduire que f est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Préciser ses valeurs propres, leurs multiplicités et les sous-espaces propres associés.

Exercice| [4051] | 8| Applications linéaires

On définit l'application $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_4[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & (1-X)P(0) + XP(1) \end{array} \right.$.

(1). Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_4[X])$.

(2). Déterminer $f \circ f$. Qu'en conclure pour f ?

(3). Déterminer alors les éléments caractéristiques de f.

Exercice| [4086] | 9| Étude d'un automorphisme

On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et on considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(1). La matrice A est-elle inversible ? Qu'en déduire pour f ?

(2). On considère $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X],\ f(P) = 2P\}$.

- **(a).** Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.
- **(b).** Donner une base et la dimension de F.

Exercice| [4111] | 10| Réduction avec un paramètre

(1). Déterminer $a \in \mathbb{R}$ pour que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ 0 & a+1 & 3 \end{pmatrix}$ admette 2 pour valeur propre.

(2). Déterminer alors une base de $E_2(A)$ dans ce cas.

(3). Toujours dans le cas où 2 est valeur propre de A, déterminer les autres valeurs propres et sous-espaces propres de A.

Exercice| [3957] | 11| Maîtriser ses définitions

Soient la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ et les matrices colonnes $X_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(1). Montrer que X_1, X_2 et X_3 sont des vecteurs propres de la matrice A.

(2). La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et le cas échéant donner une matrice inversible P et une matrice diagonale D telle que $D = P^{-1}AP$.

(3). La matrice A est-elle inversible ?

Exercice| [3960] | 12| Maîtriser son cours

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et les matrices colonnes $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(1). Quel est le rang de A ? Comment interpréter ce résultat en terme de valeur propre ?

(2). Calculer AX_1 et AX_2.

(3). La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice| [3956] | 13| Réduction de matrices 3×3

Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.
Pour chacune d'entre elles, dire si elles sont diagonalisables dans $\mathbb{R}$ et le cas échéant donner une matrice inversible P et une matrice diagonale D telle que $D = P^{-1}BP$.

Exercice| [3958] | 14| Réduction d'une matrice 4×4

Soit $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

(1). Montrer que $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de B.

(2). En étudiant le rang de la matrice $\lambda \mathrm{I}_4 - A$ en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$, déterminer les valeurs propres de B.

(3). En déduire que B est diagonalisable dans $\mathbb{R}$, et donner une matrice inversible P et une matrice diagonale D telle que $D = P^{-1}BP$.