Question de cours | Restitution de cours | Situation classique | 5 minutes | 2 points

Les énoncés ci-contre pourront vous être demandés explicitement avec toutes leurs hypothèses, avec ou sans démonstration:

- AN03 - Théorème 3 - Limite d'une suite géométrique
- AN03 - Théorème 5 - Croissances comparées
- AN03 - Théorème 9 - Théorème d'encadrement | Schéma compris
- AN03 - Théorème 10 - Divergence vers $\pm\infty$ par minoration ou majoration | Schéma compris
- AN03 - Théorème 11 - Majoration d'une valeur absolue | Schéma compris
- AN03 - Théorème 12 - Limite d'une suite monotone

Pratique calculatoire | 20 minutes | 8 points

Calculs de termes de suites arithmétiques, géométriques, de sommes de termes de telles suites ou retrouver raison et premier termes d'une telle suite.

et

Effectuer un raisonnement par récurrence pour établir l'expression du terme général d'une suite.

Thématique(s) de la semaine | 30 minutes | 10 points

AN01 | Généralités sur les suites réelles

- Reprise programme précédent

AN02 | Suites arithmético-géométrique et suites récurrentes linéaires d'ordre 2

- Reprise programme précédent

AN03 | Limites d'une suite et applications

- Reprise programme précédent

Exemples de savoir faire à maîtriser

- Reprise programme précédent

Programme à venir...

Session d'oraux blancs | Tout depuis le début de l'année.

Pour la pratique calculatoire

EX. 1 | Réf. 3135

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite arithmétique de raison r, de premier terme u_0 et $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

1. On donne $u_0 = -1$ et $r = \frac{1}{4}$. Calculer u_{12} et S_{12}.
2. On donne $u_3 = 2$ et $r = -3$. Calculer u_0 et S_3.
3. On donne $u_2 = 10$ et $u_4 = 30$. Calculer u_0 et r.
4. On donne $r = 2$, $u_2 = 7$ et $S_n = 483$. Calculer u_0 et n.

EX. 2 | Réf. 3136

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite géométrique de raison q, de premier terme u_0 et $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

1. On donne $u_0 = 3$ et $q = 4$. Calculer u_3.
2. On donne $u_2 = -4$ et $q = 3$. Calculer u_3.
3. On donne $u_1 = 5$ et $u_2 = 2$. Calculer q.
4. On donne $u_0 = 1000$ et $u_1 = 1050$. Calculer S_5.

EX. 3 | Réf. 3264

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$

Montrer par récurrence sur l'entier n que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -2^{n+1} + 3$.

Sur l'ensemble du programme

EX. 4 | Réf. 4205

Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par :

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_1 &= 5 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} &= 3u_{n+1} + 4u_n \end{cases}$$

EX. 5 | Réf. 3825

Déterminer le terme général de la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= -2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} &= \dfrac{4}{3}u_n - 1 \end{cases}$$

puis étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

EX. 6 | Réf. 0592

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 &= 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} &= \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2} \end{cases}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0; 1]$.
2. En déduire que la suite est croissante.

EX. 7 | Réf. 3270

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 10 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{u_n - 1} \end{cases}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+2} = u_n$.
2. Déterminer les différents termes de cette suite.

EX. 8 | Réf. 3271

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 &= 2 \\ \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1} &= \dfrac{3u_n-4}{4} \end{cases}$.

1. Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}, \quad u_n \geq -4$.
2. Étudier alors le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

EX. 9 | Réf. 3257

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par les relations $\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{5}{3} \end{cases}$.

1. Déterminer les valeurs des 5 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   On donnera les résultats sous forme fractionnaire.
2. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n\in\mathbb{N}, \quad v_n = u_n - 5$.
   a. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on identifiera la raison et le premier terme.
   b. Exprimer alors v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.
   c. En déduire alors la valeur de la limite éventuelle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

EX. 10 | Réf. 0677

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \\ \forall n\in\mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \dfrac{1}{2}\left(u_{n+1}+u_n\right) \end{cases}$.

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ dont le terme général est $v_n = u_n - u_{n-1}$ est une suite géométrique dont on identifiera le premier terme et la raison.
2. À l'aide de la somme des n premiers termes de la suite $(v_n)_{n\geq 1}$, déterminer l'expression de u_n en fonction de n.
3. Exprimer alors en fonction de n la somme des $n+1$ premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

EX. 11 | Réf. 3281

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 &= \dfrac{1}{2} \\ \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1} &= u_n^2 - u_n + 1 \end{cases}$

Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

EX. 12 | Réf. 3312

Déterminer la limite en $+\infty$ de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ dont le terme général est donnée par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \; u_n = n\left(\ln(n+1) - \ln(n)\right)$$

EX. 13 | Réf. 3284

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par les relations :

$$\begin{cases} u_0 &= 0 \\ v_0 &= 12 \\ \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1} &= \dfrac{u_n+v_n}{2} \text{ et } v_{n+1} = \dfrac{u_n+2v_n}{3} \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est $d_n = v_n - u_n$ est une suite géométrique dont on identifiera le premier terme et la raison.
2. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
3. En déduire la convergence et la limite de ces deux suites.

EX. 14 | Réf. 3095

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 2}{u_n + 2} \end{cases}$$

et on note $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n - 1}$.

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.
2. En déduire l'expression de v_n en fonction de n, puis celle de u_n en fonction de n.

EX. 15 | Réf. 0588

Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_1 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \end{cases}$.
Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $u_n \geq 2$.

EX. 16 | Réf. 4815

Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est donné par :

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n^2 - 10n$	$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{n}{3^n}$	$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n + \dfrac{1}{n}$

EX. 17 | Réf. 3137

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\, u_n = \dfrac{5n^2+3n}{(n+1)\left(n-\dfrac{1}{2}\right)}$.

   Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 5$ et en déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\, u_n = \dfrac{2^n-1}{4^n-3}$.

   Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

3. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\, u_n = \ln(n+1)-\ln(n)$.

   Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\, u_n = \ln\left(n^3+2n+1\right) - 3\ln(n+2)$.

   a. Montrer que $\dfrac{n^3+2n+1}{(n+2)^3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

   b. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\, u_n = n^2\cos\left(\dfrac{\pi}{n^2+1}\right)$.

   a. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_0,\, \cos\left(\dfrac{\pi}{n^2+1}\right) \geq \dfrac{1}{2}$.

   b. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

6. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\, u_n = \dfrac{n+\ln(n)}{n-\ln(n)}$.

   Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et en déduire la limite de $(u_n)_{n\geq 1}$.

7. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\, u_n = \dfrac{n^2+2}{\mathrm{e}^{\,n}-n}$.

   Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

8. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\, u_n = n^2 - \ln(n) - \sin(2n)$.

   a. Montrer que $\dfrac{\sin(2n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

   b. En déduire que $\dfrac{u_n}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est-elle convergente ?