

Question de cours - 5 minutes - 2 points

Les énoncés ci-contre pourront vous être demandés explicitement avec toutes leurs hypothèses, avec ou sans démonstration:

- AL14 - Définitions 2-3 - |Éléments propres d'une matrice | Sous-espace propre d'une matrice
- AL14 - Théorème 11 - Condition nécessaire et suffisante de diagonalisation | Cas matriciel
- AL14 - Théorème 12 - Valeurs propres d'une matrice 2×2

Pratique calculatoire - 15/20 minutes - 8 points

Montrer qu'un réel λ donné est valeur propre ou non d'une matrice de $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par « contemplation » ou par l'étude de l'inversibilité de la matrice $A - \lambda I_3$, puis déterminer une base du sous-espace propre associé.

et

Rechercher les valeurs propres (uniquement) d'une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par discussion sur λ du rang de $A - \lambda I_3$.

On privilégiera la recherche d'éléments de $E_\lambda(A) = \text{Ker}(A - \lambda I_3)$ par combinaison linéaire nulle des colonnes de la matrice avant de se « rabattre » sur la résolution du système $(A - \lambda I_3|0)$.

Thématique(s) de la semaine - 30 minutes - 10 points

Un ou plusieurs exercice(s) vous sera(ont) proposé(s) par votre interrogateur tels ceux proposés dans la banque d'exercices ci-après. Ils porteront sur les chapitres et savoir-faire détaillés ci-dessous.

AL14 | Diagonalisation de matrices ou d'endomorphismes | ATTENTION : uniquement aspect matriciel

- Éléments propres d'une matrice
- Caractérisation des valeurs propres par le rang de $A - \lambda I_n$
- Exemples d'obtention d'éléments propres à partir des définitions pour les matrices
- Utilisation d'un polynôme annulateur pour la recherche de valeurs propres | Résultat non exigible
- Liberté d'une famille de vecteurs propres
- Cardinal du spectre
- Matrice diagonalisable
- Théorème de diagonalisation pour les matrices
- Somme des sous-espaces propres pour les matrices
- Cas particulier des matrices 2×2

Exemples de savoir faire à maîtriser

- Montrer qu'un réel est une valeur propre

- Montrer qu'un vecteur est un vecteur propre
- Déterminer les valeurs propres d'une matrice A par discussion sur le rang de la matrice $\lambda I_n - A$
- Déterminer une base d'un sous-espace propre
- Utiliser un polynôme annulateur pour déterminer les valeurs propres

Programme à venir

Reprise programme actuel | Diagonalisation des endomorphismes

Pour la pratique calculatoire**Exercice| [5189] | 1| Éléments propres d'une matrice 3×3**

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

- (1). Montrer que -4 est valeur propre de A puis déterminer un vecteur propre associé à cette valeur propre.
- (2). Calculer $A \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Qu'en déduire pour A ?
- (3). Donner une autre valeur propre pour A , et un vecteur propre associé.

Exercice| [5187] | 2| Éléments propres d'une matrice 3×3

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- (1). Déterminer une base de $\text{Ker}(A - I_3)$. Qu'en déduit-on?
- (2). 0 est-elle valeur propre de A ?
- (3). Pourquoi 4 est valeur propre de A ? Donner alors un élément de $E_4(A)$.

Exercice| [5188] | 3| Éléments propres d'une matrice 3×3

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

- (1). Montrer que 3 est valeur propre de A puis déterminer vecteur propre associé à cette valeur propre.

- (2). A-t-on $-2 \in \text{sp}(A)$? Si oui, déterminer une base du sous-espace propre $E_{-2}(A)$.
 (3). A-t-on $2 \in \text{sp}(A)$? Si oui, déterminer une base du sous-espace propre $E_{-2}(A)$.

Exercice| [4228] | 4| Recherche d'éléments propres

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

- (1). Déterminer les valeurs propres de A .
 (2). Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres.
 (3). Que peut-on en conclure?

Exercice| [4230] | 5| Recherche d'éléments propres

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

- (1). Déterminer les valeurs propres de A .
 (2). Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres.
 (3). Que peut-on en conclure?

Sur l'ensemble du programme**Exercice| [4111] | 6| Réduction avec un paramètre**

- (1). Déterminer $a \in \mathbb{R}$ pour que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ 0 & a+1 & 3 \end{pmatrix}$ admette 2 pour valeur propre.
 (2). Déterminer alors une base de $E_2(A)$ dans ce cas.
 (3). Toujours dans le cas où 2 est valeur propre de A , déterminer les autres valeurs propres et sous-espaces propres de A .

Exercice| [3957] | 7| Maîtriser ses définitions

Soient la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ et les matrices colonnes $X_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

et $X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- (1). Montrer que X_1 , X_2 et X_3 sont des vecteurs propres de la matrice A .
 (2). La matrice A est-elle diagonalisable dans \mathbb{R} et le cas échéant donner une matrice inversible P et une matrice diagonale D telle que $D = P^{-1}AP$.
 (3). La matrice A est-elle inversible?

Exercice| [3960] | 8| Maîtriser son cours

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et les matrices colonnes $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- (1). Quel est le rang de A ? Comment interpréter ce résultat en terme de valeur propre?
 (2). Calculer AX_1 et AX_2 .
 (3). La matrice A est-elle diagonalisable?

Exercice| [3956] | 9| Réduction de matrices 3×3

Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

Pour chacune d'entre elles, dire si elles sont diagonalisables dans \mathbb{R} et le cas échéant donner une matrice inversible P et une matrice diagonale D telle que $D = P^{-1}BP$.

Exercice| [3958] | 10| Réduction d'une matrice 4×4

Soit $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

- (1). Montrer que $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de B .
 (2). En étudiant le rang de la matrice $\lambda I_4 - A$ en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$, déterminer les valeurs propres de B .
 (3). En déduire que B est diagonalisable dans \mathbb{R} , et donner une matrice inversible P et une matrice diagonale D telle que $D = P^{-1}BP$.