

Question de cours | Restitution de cours | Situation classique | 5 minutes | 2 points

Les énoncés ci-contre pourront vous être demandés explicitement avec toutes leurs hypothèses, avec ou sans démonstration:

- AN03 - Théorème 3 - Limite d'une suite géométrique
- AN03 - Théorème 5 - Croissances comparées
- AN03 - Théorème 9 - Théorème d'encadrement | Schéma compris
- AN03 - Théorème 10 - Divergence vers $\pm\infty$ par minoration ou majoration | Schéma compris
- AN03 - Théorème 11 - Majoration d'une valeur absolue | Schéma compris
- AN03 - Théorème 12 - Limite d'une suite monotone

Pratique calculatoire | 20 minutes | 8 points

Calculs de termes de suites arithmétiques, géométriques, de sommes de termes de telles suites ou retrouver raison et premier termes d'une telle suite.

et

Effectuer un raisonnement par récurrence pour établir l'expression du terme général d'une suite.

Thématique(s) de la semaine | 30 minutes | 10 points**AN01 | Généralités sur les suites réelles**

- Différents modes de génération d'une suite réelle
- Suites arithmétiques et suites géométriques
- Suites extraites
- Suites majorées, minorées ou bornées
- Sens de variation d'une suite

AN02 | Suites arithmético-géométrique et suites récurrentes linéaires d'ordre 2

- Terme général d'une suite arithmético-géométrique
- Terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 uniquement cas $\Delta \geq 0$

AN03 | Limites d'une suite et applications

- Notion de convergence et de divergence pour une suite
- Opérations sur les limites
- Croissances comparées et comportement de q^n en $+\infty$
- Convergence et suites extraites d'indices pairs et impairs
- Caractère borné d'une suite convergente et stabilité du signe
- Théorème d'encadrement
- Théorème de la limite monotone
- Suites adjacentes et limite de deux suites adjacentes

Exemples de savoir faire à maîtriser

- Calculer des termes ou une somme de termes d'une suite arithmétique ou géométrique
- Déterminer le terme général d'une suite arithmético-géométrique
- Déterminer le terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 uniquement cas $\Delta \geq 0$
- Étudier le sens de variation d'une suite
- Montrer que deux suites sont adjacentes
- Étudier la convergence d'une suite arithmético-géométrique
- Calculer la limite d'une suite en mobilisant un théorème d'encadrement
- Établir la convergence d'une suite à l'aide du théorème de la limite monotone

Programme à venir...

Reprise programme à l'identique

Pour la pratique calculatoire

EX. 1 | Réf. 3135

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne une suite arithmétique de raison r , de premier terme u_0 et $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

1. On donne $u_0 = -1$ et $r = \frac{1}{4}$. Calculer u_{12} et S_{12} .
2. On donne $u_3 = 2$ et $r = -3$. Calculer u_0 et S_3 .
3. On donne $u_2 = 10$ et $u_4 = 30$. Calculer u_0 et r .
4. On donne $r = 2$, $u_2 = 7$ et $S_n = 483$. Calculer u_0 et n .

EX. 2 | Réf. 3136

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne une suite géométrique de raison q , de premier terme u_0 et $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

1. On donne $u_0 = 3$ et $q = 4$. Calculer u_3 .
2. On donne $u_2 = -4$ et $q = 3$. Calculer u_3 .
3. On donne $u_1 = 5$ et $u_2 = 2$. Calculer q .
4. On donne $u_0 = 1000$ et $u_1 = 1050$. Calculer S_5 .

EX. 3 | Réf. 3264

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$
 Montrer par récurrence sur l'entier n que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -2^{n+1} + 3$.

Sur l'ensemble du programme

EX. 4 | Réf. 4205

Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donnée par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} + 4u_n \end{cases}$$

EX. 5 | Réf. 3825

Déterminer le terme général de la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{4}{3}u_n - 1 \end{cases}$$

puis étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

EX. 6 | Réf. 0592

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2} \end{cases}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0; 1]$.
2. En déduire que la suite est croissante.

EX. 7 | Réf. 3270

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 10 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{u_n - 1} \end{cases} .$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_n$.
2. Déterminer les différents termes de cette suite.

EX. 8 | Réf. 3271

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3u_n - 4}{4} \end{cases} .$$

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq -4$.
2. Étudier alors le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

EX. 9 | Réf. 3257

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par les relations

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{5}{3} \end{cases} .$$

1. Déterminer les valeurs des 5 premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
On donnera les résultats sous forme fractionnaire.
2. On définit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - 5$.
 - a. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on identifiera la raison et le premier terme.
 - b. Exprimer alors v_n en fonction de n , puis u_n en fonction de n .
 - c. En déduire alors la valeur de la limite éventuelle de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

EX. 10 | Réf. 0677

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donnée par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n) \end{cases} .$$

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ dont le terme général est $v_n = u_n - u_{n-1}$ est une suite géométrique dont on identifiera le premier terme et la raison.
2. À l'aide de la somme des n premiers termes de la suite $(v_n)_{n \geq 1}$, déterminer l'expression de u_n en fonction de n .
3. Exprimer alors en fonction de n la somme des $n + 1$ premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

EX. 11 | Réf. 3281

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1 \end{cases}$$

Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

EX. 12 | Réf. 3312

Déterminer la limite en $+\infty$ de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ dont le terme général est donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = n(\ln(n+1) - \ln(n))$$

EX. 13 | Réf. 3284

On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par les relations :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ v_0 = 12 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont le terme général est $d_n = v_n - u_n$ est une suite géométrique dont on identifiera le premier terme et la raison.
2. Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.
3. En déduire la convergence et la limite de ces deux suites.

EX. 14 | Réf. 3095

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{5u_n - 2}{u_n + 2} \end{cases}$$

et on note $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de terme général $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1}$.

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.
2. En déduire l'expression de v_n en fonction de n , puis celle de u_n en fonction de n .

EX. 15 | Réf. 0588

Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_1 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \end{cases}$.

Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $u_n \geq 2$.

EX. 16 | Réf. 4815

Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont le terme général est donné par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n^2 - 10n$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n}{3^n}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n + \frac{1}{n}$$

EX. 17 | Réf. 3137

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{5n^2 + 3n}{(n+1) \left(n - \frac{1}{2} \right)}$.

Montrer que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 5$ et en déduire la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2^n - 1}{4^n - 3}$.

Montrer que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

3. Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \ln(n+1) - \ln(n)$.

Montrer que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

4. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \ln(n^3 + 2n + 1) - 3 \ln(n + 2)$.

a. Montrer que $\frac{n^3 + 2n + 1}{(n+2)^3} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$.

b. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

5. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n^2 \cos\left(\frac{\pi}{n^2 + 1}\right)$.

a. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_0, \cos\left(\frac{\pi}{n^2 + 1}\right) \geq \frac{1}{2}$.

b. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

6. Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n + \ln(n)}{n - \ln(n)}$.

Montrer que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$ et en déduire la limite de $(u_n)_{n \geq 1}$.

7. Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n^2 + 2}{e^n - n}$.

Montrer que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

8. Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = n^2 - \ln(n) - \sin(2n)$.

a. Montrer que $\frac{\sin(2n)}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

b. En déduire que $\frac{u_n}{n^2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$. La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est-elle convergente ?