Question de cours | Restitution de cours | Situation classique | 5 minutes | 2 points

Les énoncés ci-contre pourront vous être demandés explicitement avec toutes leurs hypothèses, avec ou sans démonstration:

- AL12 - Théorème 5 - Caractérisation des supplémentaires par la dimension
- AL12 - Théorème 7 - Concaténation de base de sous-espaces supplémentaires
- AL13 - Proposition 4 - Relations projecteur/symétrie | Schéma inclus

Pratique calculatoire | 20 minutes | 8 points

Montrer que deux sous-espaces sont en somme directe ou supplémentaires

ou

Montrer qu'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ est un projecteur ou une symétrie vectorielle, puis déterminer ses éléments caractéristiques

Thématique(s) de la semaine | 30 minutes | 10 points

AL12 | Sommes de sous-espaces vectoriels

- Somme de sous-espaces vectoriels
- Somme directe de deux sous-espaces
- Caractérisations des sommes directes
- Théorème de concaténation des bases
- Somme directe de p sous-espaces et caractérisation

AL13 | Projecteurs et symétries

- Projecteurs
- Caractérisation d'un projecteur et éléments caractéristiques
- Symétries
- Caractérisation d'une symétrie et éléments caractéristiques

AL14 | Changement de bases pour les endomorphismes

- Matrices de passage
- Formule de changement de base pour les vecteurs
- Formule de changement de base pour les endomorphismes

Exemples de savoir faire à maîtriser

- Montrer que la somme de deux sous-espaces est directe
- Montrer que deux sous-espaces sont supplémentaires
- Utiliser le théorème de concaténation des bases pour montrer que deux sous-espaces sont supplémentaires
- Montrer qu'un endomorphisme est un projecteur et en déterminer ses éléments caractéristiques
- Montrer qu'un endomorphisme est une symétrie et en déterminer ses éléments caractéristiques

Programme à venir...

Reprise programme à l'identique

Pour la pratique calculatoire

EX. 1 | Réf. 4046

Soit $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que f est une symétrie vectorielle.
2. Déterminer les éléments caractéristiques de f.

EX. 2 | Réf. 4827

Sous-espaces en somme directe On considère F_1 et F_2 les deux sous-ensembles de $\mathbb{R}_2[X]$ donnés par :

$$F_1 = \{P \in \mathbb{R}_2[X],\ P(0) = 0 \text{ et } P'(1) = 0\}$$
$$F_2 = \text{Vect}\left(X, X^2\right).$$

1. Montrer que F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. F_1 et F_2 sont-ils en somme directe ?

EX. 3 | Réf. 4826

On considère F_1 et F_2 les deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^4$ donnés par :

$$F_1 = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x + y + z + t = 0 \text{ et } x - y + z - t = 0\right\}$$
$$F_2 = \text{Vect}\left((1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, -1)\right).$$

1. Montrer que F_1 et F_2 sont deux sous-espaces de $\mathbb{R}^4$.
2. F_1 et F_2 sont-ils supplémentaires ?

Sur l'ensemble du programme

EX. 4 | Réf. 4045

On se place dans $\mathbb{R}_2[X]$ et on considère $F = \text{Vect}\left(X, X^2\right)$ et $G = \text{Vect}\,(1 + X)$ deux sous-espaces de $\mathbb{R}_2[X]$.
On admet que $\mathbb{R}_2[X] = F \oplus G$.
Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ de la symétrie vectorielle par rapport à F et parallèlement à G.

EX. 5 | Réf. 4050

Dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on pose :

$$F = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ a - c + d = b + c - d = 0\right\}$$
$$\text{et } G = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

Montrer que $\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) = F \oplus G$.

EX. 6 | Réf. 4051

On définit l'application $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_4[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & (1 - X)P(0) + XP(1) \end{array}\right.$.

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}_4[X]\right)$.
2. Déterminer $f \circ f$. Qu'en conclure pour f ?
3. Déterminer alors les éléments caractéristiques de f.

EX. 7 | Réf. 1413

Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^5$. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^5$ canoniquement associé à la matrice A ci-contre.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer des bases de $\mathrm{Im}\,(f)$ et $\mathrm{Ker}\,(f)$.
2. Montrer que $\mathbb{R}^5 = \mathrm{Ker}\,(f) \oplus \mathrm{Im}\,(f)$.
3. f est-il un projecteur ?

EX. 8 | Réf. 2831

Soit $F = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P(0) = P'(1) = 0\}$ et $G = \mathbb{R}_1[X]$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que $F \cap G = \{\tilde{0}\}$.
3. Montrer que $\mathbb{R}[X] = F \oplus G$.
   On pourra penser à la division euclidienne...

EX. 9 | Réf. 2834

Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ P(0) = P(1)\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ P'(0) = P'(1)\}$.

1. Déterminer une base et la dimension de F.
2. Déterminer une base et la dimension de G.
3. La somme $F + G$ est-elle directe ?

EX. 10 | Réf. 2833

On considère l'ensemble $E = \left\{ \begin{pmatrix} a-b & 0 & a+b-c \\ 0 & 2a-b+c & 0 \\ a+b-c & 0 & a-b \end{pmatrix},\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base et la dimension de E.
3. Construire un supplémentaire de E dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

EX. 11 | Réf. 2836

Soient $F = \left\{ P \in \mathbb{R}_2[X],\ \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$ et $G = \mathrm{Vect}\,\left(1 + X + X^2\right)$.
Démontrer que $\mathbb{R}_2[X] = F \oplus G$.