Question de cours - 5 minutes - 2 points

Les énoncés ci-contre pourront vous être demandés explicitement avec toutes leurs hypothèses, avec ou sans démonstration:

- AL12 - Théorème 5 - Caractérisation des supplémentaires par la dimension
- AL12 - Théorème 7 - Concaténation de base de sous-espaces supplémentaires
- AL13 - Proposition 4 - Relations projecteur/symétrie | Schéma inclus

Pratique calculatoire - 15/20 minutes - 8 points

Montrer que deux sous-espaces sont en somme directe ou supplémentaires

ou

Montrer qu'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ est un projecteur ou une symétrie vectorielle, puis déterminer ses éléments caractéristiques

Thématique(s) de la semaine - 30 minutes - 10 points

Un ou plusieurs exercice(s) vous sera(ont) proposé(s) par votre interrogateur tels ceux proposés dans la banque d'exercices ci-après.
Ils porteront sur les chapitres et savoir-faire détaillés ci-dessous.

AL12 | Sommes de sous-espaces vectoriels

- Somme de sous-espaces vectoriels
- Somme directe de deux sous-espaces
- Caractérisations des sommes directes
- Théorème de concaténation des bases
- Somme directe de p sous-espaces et caractérisation

AL13 | Projecteurs et symétries

- Projecteurs
- Caractérisation d'un projecteur et éléments caractéristiques
- Symétries
- Caractérisation d'une symétrie et éléments caractéristiques

AL14 | Changement de bases pour les endomorphismes

- Matrices de passage
- Formule de changement de base pour les vecteurs
- Formule de changement de base pour les endomorphismes

Exemples de savoir faire à maîtriser

- Montrer que la somme de deux sous-espaces est directe
- Montrer que deux sous-espaces sont supplémentaires
- Utiliser le théorème de concaténation des bases pour montrer que deux sous-espaces sont supplémentaires
- Montrer qu'un endomorphisme est un projecteur et en déterminer ses éléments caractéristiques
- Montrer qu'un endomorphisme est une symétrie et en déterminer ses éléments caractéristiques

Programme à venir

Reprise programme actuel | Diagonalisation (début)

Pour la pratique calculatoire

Exercice| [4046] | 1| Symétrie vectorielle

Soit $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

(1). Montrer que f est une symétrie vectorielle.

(2). Déterminer les éléments caractéristiques de f.

Exercice| [4827] | 2| Sous-espaces en somme directe

On considère F_1 et F_2 les deus sous-ensembles de $\mathbb{R}_2[x]$ donnés par :

$$F_1 = \{P \in \mathbb{R}_2[x],\ P(0) = 0 \text{ et } P'(1) = 0\}$$
$$F_2 = \mathrm{Vect}\left(x \longmapsto x + x^2\right).$$

F_1 et F_2 sont-ils en somme directe ?

Exercice| [4826] | 3| Sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^4$

On considère F_1 et F_2 les deus sous-ensembles de $\mathbb{R}^4$ donnés par :

$$F_1 = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x + y + z + t = 0 \text{ et } x - y + z - t = 0\right\}$$
$$F_2 = \mathrm{Vect}\left((1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, -1)\right).$$

F_1 et F_2 sont-ils supplémentaires ?

Sur l'ensemble du programme

Exercice| [4045] | 4| Matrice d'une symétrie vectorielle

On se place dans $\mathbb{R}_2[X]$ et on considère $F = \mathrm{Vect}\left(X, X^2\right)$ et $G = \mathrm{Vect}\,(1+X)$ deux sous-espaces de E.
On admet que $\mathbb{R}_2[X] = F \oplus G$.
Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ de la symétrie vectorielle par rapport à F et parallèlement à G.

Exercice| [4050] | 5| Sous-espaces supplémentaires

Dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on pose :

$$F = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ a-c+d = b+c-d = 0\right\}$$

$$\text{et } G = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

Montrer que $\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) = F \oplus G$.

Exercice| [4051] | 6| Applications linéaires

On définit l'application $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_4[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & (1-X)P(0) + XP(1) \end{array}\right.$.

(1). Montrer que $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}_4[X]\right)$.

(2). Déterminer $f \circ f$. Qu'en conclure pour f ?

(3). Déterminer alors les éléments caractéristiques de f.

Exercice| [1413] | 7| Projecteurs et sommes directes

Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^5$. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^5$ canoniquement associé à la matrice A ci-contre.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1). Déterminer des bases de $\mathrm{Im}\,(f)$ et $\mathrm{Ker}\,(f)$.

(2). Montrer que $\mathbb{R}^5 = \mathrm{Ker}\,(f) \oplus \mathrm{Im}\,(f)$.

(3). f est-il un projecteur ?

Exercice| [2831] | 8| Somme directe et supplémentaires

Soit $F = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P(0) = P'(1) = 0\}$ et $G = \mathbb{R}_1[X]$.

(1). Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

(2). Montrer que $\mathbb{R}[X] = F \oplus G$.

Exercice| [2834] | 9| Somme directe et supplémentaires

Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ P(0) = P(1)\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ P'(0) = P'(1)\}$.

(1). Déterminer une base et la dimension de F.

(2). Déterminer une base et la dimension de G.

(3). La somme $F + G$ est-elle directe ?

Exercice| [2833] | 10| Somme directe et supplémentaires

On considère l'ensemble $E = \left\{\begin{pmatrix} a-b & 0 & a+b-c \\ 0 & 2a-b+c & 0 \\ a+b-c & 0 & a-b \end{pmatrix},\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\}$.

(1). Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

(2). Déterminer une base et la dimension de E.

(3). Construire un supplémentaire de E dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice| [2836] | 11| Somme directe et supplémentaires

Soient $F = \left\{P \in \mathbb{R}_2[X],\ \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0\right\}$ et $G = \mathrm{Vect}\left(1 + X + X^2\right)$.
Démontrer que $\mathbb{R}_2[X] = F \oplus G$.