Question de cours - 5 minutes - 2 points

Les énoncés ci-contre pourront vous être demandés explicitement avec toutes leurs hypothèses, avec ou sans démonstration:

- AN14 - Théorème 5 - Intégrales de Riemann | Critère de convergence et valeur
- AN14 - Théorème 6 - Convergence et valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,dt$
- AN14 - Théorème 11 - Théorème dit « d'équivalence pour les intégrales impropres de fonctions positives »

Pratique calculatoire - 15/20 minutes - 8 points

Obtenir la convergence et la valeur d'une intégrale impropre en sa borne supérieure par la définition.

Votre interrogateur vous proposera deux situations de travail en pratique calculatoire, et on rappelle que toute étude d'une intégrale impropre consiste en l'explicitation du domaine de continuité et de l'identification des bornes impropres.

Thématique(s) de la semaine - 30 minutes - 10 points

Un ou plusieurs exercice(s) vous sera(ont) proposé(s) par votre interrogateur tels ceux proposés dans la banque d'exercices ci-après.
Ils porteront sur les chapitres et savoir-faire détaillés ci-dessous.

AN13 | Intégrales généralisées

- Reprise programme précédent

Exemples de savoir faire à maîtriser

- Reprise programme précédent

Programme à venir

Somme de sous-espaces vectoriels | Projecteurs et symétrie

Pour la pratique calculatoire

Exercice| [4818] | 1| Convergence et calcul d'une intégrale impropre

Étudier la convergence et calculer la valeur de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx$.

Sur l'ensemble du programme

Exercice| [5183] | 2| Convergence et calcul d'intégrales impropres

Déterminer si les intégrales suivantes sont convergentes, et le cas échéant, calculer leur valeur.

$\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$	$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$	$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2}\,dt$
$\displaystyle\int_{-\infty}^0 te^{-t^2}\,dt$	$\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$	$\displaystyle\int_0^{+\infty} 1\,dt$
$\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{3^t}\,dt$	$\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}\,dt$	$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt$

Exercice| [4247] | 3| Étude de la convergence d'intégrales impropres

Parmi les intégrales suivantes, lesquelles sont convergentes ?

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\,dx$	$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^3+3t^2+t}}\,dt$	$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}+t}{t^3}\,dt$

Exercice| [4248] | 4| Étude de la convergence d'intégrales impropres

Parmi les intégrales suivantes, lesquelles sont convergentes ?

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{x}{x^3+1}}\,dx$	$\displaystyle\int_2^{+\infty} \ln\left(1+\frac{2}{x^3}\right)\,dx$	$\displaystyle\int_2^{+\infty} \ln\left(2+\frac{2}{x^3}\right)\,dx$

Exercice| [4817] | 5| Intégrales généralisées

Établir la convergence de l'intégrale : $\displaystyle I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$

Exercice| [4602] | 6| Convergence et calcul d'une intégrale impropre

On considère l'intégrale impropre $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)\,\mathrm{d}t$.

(1). Montrer que I est une intégrale convergente.

(2). À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \int_a^b \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\,\mathrm{d}t = b\ln\left(1+\frac{1}{b^2}\right) - a\ln\left(1+a^2\right) + 2a\ln(a) + 2\arctan(b) - 2\arctan(a)$$

(3). En déduire alors la valeur de l'intégrale I.

Exercice| [4606] | 7| Convergence d'une intégrale impropre

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$ est une intégrale convergente.