Question de cours | Restitution de cours | Situation classique | 5 minutes | 2 points

Les énoncés ci-contre pourront vous être demandés explicitement avec toutes leurs hypothèses, avec ou sans démonstration:

- AL05 - Définition 1 et Théorème 1 - Matrice inversible | Matrices carrées inversibles
- AL05 - Théorèmes 2 et 3 - Caractérisation des matrices inversibles par le rang d'un système linéaire associé | Condition d'inversibilité pour une matrice diagonale ou triangulaire
- AL05 - Définition 3 et Théorème 5 - Déterminant d'une matrice 2×2 | Caractérisation des matrices 2×2 inversibles par leur déterminant

Pratique calculatoire | 20 minutes | 8 points

Recherche de l'inverse d'une matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ à l'aide de la matrice augmentée $(A|\mathrm{I}_3)$

et/ou

Recherche de l'inverse d'une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ par polynôme annulateur

Dans les deux cas :

- il sera demandé de justifier au moment le plus opportun par rapport à la démarche, de justifier de l'inversibilité de la matrice A ;
- il sera demandé d'expliciter complètement l'inverse de la matrice A.

Thématique(s) de la semaine | 30 minutes | 10 points

AL04 | Calcul matriciel

- Notion de matrices $n \times p$
- Opérations sur les matrices
- Matrices élémentaires et extraction de lignes/colonnes
- Binôme de Newton pour les matrices

AL05 | Matrices inversibles

- Matrice inversible
- Caractérisation des matrices inversibles par le rang
- Cas des matrices diagonales ou triangulaire
- Recherche de l'inverse d'une matrice A :
  - $\hookrightarrow$ par exploitation d'une relation polynomiale en la matrice A ;
  - $\hookrightarrow$ par résolution du système linéaire $AX = B$
  - $\hookrightarrow$ par échelonnement réduit en ligne de la matrice augmentée $(A|\mathrm{I}_n)$
- Inverse d'un produit de matrices inversibles

AL06 | Trace et transposition

- Trace d'une matrice
- Transposée d'une matrice
- Caractère linéaire de la trace et de la transposition
- Trace d'un produit
- Transposée d'un produit
- Transposition et inverse

Exemples de savoir faire à maîtriser

- Effectuer une combinaison linéaire de matrices
- Calculer le produit de deux matrices
- Utiliser le binôme de Newton pour calculer les puissances d'une matrice
- Techniques de recherches l'inverse d'une matrice

Programme à venir...

Reprise programme

Pour la pratique calculatoire

EX. 1 | Réf. 3579

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Montrer que A^2 peut s'écrire comme combinaison linéaire de A et I_3.

2. En déduire que A est inversible et en détérminer son inverse.

EX. 2 | Réf. 3588

Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que M est inversible et en calculer son inverse.

Sur l'ensemble du programme

EX. 3 | Réf. 5169

On considère une matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -A$.

Déterminer $(A - 2\mathrm{I}_3)^9$.

EX. 4 | Réf. 5171

A est une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = 2\mathrm{I}_3 + N$ où N est telle que $N^3 = (0)$.

Exprimer A^n en fonction de n, I_3 et N.

EX. 5 | Réf. 5170

Soient B et C deux matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que : $\left\{\begin{array}{rcl} BC & = & 2\mathrm{I}_3 \\ BC & = & CB \\ B^2 & = & C \\ C^2 & = & B \end{array}\right.$

Déterminer $(B + C)^9$.

EX. 6 | Réf. 3580

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^3 - A$, en déduire que A est inversible.

2. Déterminer A^{-1}.

EX. 7 | Réf. 3581

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que M est inversible, puis calculer M^{-1}.

2. En déduire la résolution du système $\mathcal{S}$: $\left\{\begin{array}{l} x_1 - x_3 = m \\ -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 2m \end{array}\right.$ où m est un réel quelconque.

EX. 8 | Réf. 3582

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que M est inversible, puis déterminer M^{-1}.
2. En déduire une matrice $X \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $2XM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

EX. 9 | Réf. 5095

Effectuer le produit matriciel QAP où :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ Q = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$