## Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

NOM | Prénom

## EX. 1 | Réf. 5314

Résoudre à l'aide d'un échelonnement réduit en lignes, le système suivant :

$$\begin{cases} x - y + 2z = -3 \\ -x + 2y + z = -2 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$$

## EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 5314

On commence par échelonner, par l'algorithme de Gauss, la matrice augmentée afin de déterminer le rang du système et son éventuelle compatibilité :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 1L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & 7 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 1L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -6 & 12 \end{array}\right)$$

Il y a 3 pivots non nuls. Le rang du système est donc 3.
On poursuit l'échelonnement pour obtenir une matrice échelonnée réduite :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -6 & 12 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{2}L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{3}L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 12 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 + 1L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 12 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow -\frac{1}{6}L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

En notant $x_1$, . . ., $x_3$ les inconnues du système, on en déduit les relations :

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = -2 \end{cases}$$

## EX. 2 | Réf. 5315

On a procédé à un échelonnement réduit en lignes d'un système de taille $3 \times 4$ et on a obtenu la représentation matricielle ci-contre :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Expliciter l'ensemble des solutions de ce système.

## EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 5315

On commence par remarquer que le système est de rang $3$ et est clairement compatible.
En notant $x_1$, $x_2$, $x_3$ et $x_4$ les inconnues de ce système, on en déduit les inconnues principales du système sont $x_1$, $x_2$ et $x_4$, et que $x_3$ est donc une inconnue secondaire.
Il vient alors que les $4-$uplets solutions de ce système sont les $4-$uplets de réels donnés par :

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x_1 & = & -2 & - & x_3 \\ x_1 & = & 1 & - & 2x_3 \\ x_3 & = & & & x_3 \\ x_4 & = & 2 & & \end{array}\right., \text{ où } x_3 \in \mathbb{R}$$

NOM | Prénom

## EX. 3 | Réf. 5316

Résoudre à l'aide d'un échelonnement réduit en lignes, le système suivant :

$$\begin{cases} x + y - 2z = -5 \\ x + 2y + z = 2 \\ 2x - y + z = -3 \end{cases}$$

## EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 5316

On commence par échelonner, par l'algorithme de Gauss, la matrice augmentée afin de déterminer le rang du système et son éventuelle compatibilité :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -3 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 1L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & -3 & 5 & 7 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 14 & 28 \end{array}\right)$$

Il y a 3 pivots non nuls. Le rang du système est donc 3.
On poursuit l'échelonnement pour obtenir une matrice échelonnée réduite :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 14 & 28 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{3}{14}L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{7}L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 14 & 28 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - 1L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 14 & 28 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow \frac{1}{14}L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

En notant $x_1$, …, $x_3$ les inconnues du système, on en déduit les relations :

$$\begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

## EX. 4 | Réf. 5320

On a procédé à un échelonnement réduit en lignes d'un système de taille $3 \times 4$ et on a obtenu la représentation matricielle ci-contre :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Expliciter l'ensemble des solutions de ce système.

## EX. 4 | Éléments de correction | Réf. 5320

On commence par remarquer que le système est de rang $3$ et est clairement compatible.
En notant $x_1$, $x_2$, $x_3$ et $x_4$ les inconnues de ce système, on en déduit les inconnues principales du système sont $x_1$, $x_2$ et $x_4$, et que $x_3$ est donc une inconnue secondaire.
Il vient alors que les $4-$uplets solutions de ce système sont les $4-$uplets de réels donnés par :

$$\begin{cases} x_1 = -2 - 2x_3 \\ x_1 = 1 + x_3 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = -2 \end{cases}, \text{ où } x_3 \in \mathbb{R}$$

NOM | Prénom

**EX. 5 | Réf. 5317**

Résoudre à l'aide d'un échelonnement réduit en lignes, le système suivant :

$$\begin{cases} x - 2y - 2z = 8 \\ x + 2y + \ \ z = -2 \\ 2x + 3y + \ \ z = -1 \end{cases}$$

**EX. 5 | Éléments de correction | Réf. 5317**

On commence par échelonner, par l'algorithme de Gauss, la matrice augmentée afin de déterminer le rang du système et son éventuelle compatibilité :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 1L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 8 \\ 0 & 4 & 3 & -10 \\ 0 & 7 & 5 & -17 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{7}{4}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 8 \\ 0 & 4 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Il y a 3 pivots non nuls. Le rang du système est donc 3.
On poursuit l'échelonnement pour obtenir une matrice échelonnée réduite :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 8 \\ 0 & 4 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 12L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - 8L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{2}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow \frac{1}{4}L_2 \\ L_3 \leftarrow -4L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

En notant $x_1$, …, $x_3$ les inconnues du système, on en déduit les relations :

$$\begin{cases} x_1 & = & 2 \\ x_2 & = & -1 \\ x_3 & = & -2 \end{cases}$$

**EX. 6 | Réf. 5321**

On a procédé à un échelonnement réduit en lignes d'un système de taille $3 \times 4$ et on a obtenu la représentation matricielle ci-contre :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Expliciter l'ensemble des solutions de ce système.

**EX. 6 | Éléments de correction | Réf. 5321**

On commence par remarquer que le système est de rang $3$ et est clairement compatible.
En notant $x_1$, $x_2$, $x_3$ et $x_4$ les inconnues de ce système, on en déduit les inconnues principales du système sont $x_1$, $x_2$ et $x_4$, et que $x_3$ est donc une inconnue secondaire.
Il vient alors que les $4-$uplets solutions de ce système sont les $4-$uplets de réels donnés par :

$$\begin{cases} x_1 & = & 1 & - & 2x_3 \\ x_1 & = & 2 & + & x_3 \\ x_3 & = & & & x_3 \\ x_4 & = & -2 & & \end{cases}, \text{ où } x_3 \in \mathbb{R}$$

NOM | Prénom

## EX. 7 | Réf. 5318

Résoudre à l'aide d'un échelonnement réduit en lignes, le système suivant :

$$\begin{cases} x+2y+3z=-7 \\ x+2y-\ \ z=1 \\ 2x+3y+\ \ z=-3 \end{cases}$$

## EX. 7 | Éléments de correction | Réf. 5318

On commence par échelonner, par l'algorithme de Gauss, la matrice augmentée afin de déterminer le rang du système et son éventuelle compatibilité :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -7 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 1L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \\ 0 & -1 & -5 & 11 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -7 \\ 0 & -1 & -5 & 11 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \end{array}\right)$$

Il y a 3 pivots non nuls. Le rang du système est donc 3.
On poursuit l'échelonnement pour obtenir une matrice échelonnée réduite :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -7 \\ 0 & -1 & -5 & 11 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{5}{4}L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + \frac{3}{4}L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow -1L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{4}L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

En notant $x_1$, …, $x_3$ les inconnues du système, on en déduit les relations :

$$\begin{cases} x_1 & = & 1 \\ x_2 & = & -1 \\ x_3 & = & -2 \end{cases}$$

## EX. 8 | Réf. 5322

On a procédé à un échelonnement réduit en lignes d'un système de taille $3 \times 4$ et on a obtenu la représentation matricielle ci-contre :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Expliciter l'ensemble des solutions de ce système.

## EX. 8 | Éléments de correction | Réf. 5322

On commence par remarquer que le système est de rang $3$ et est clairement compatible.
En notant $x_1$, $x_2$, $x_3$ et $x_4$ les inconnues de ce système, on en déduit les inconnues principales du système sont $x_1$, $x_2$ et $x_4$, et que $x_3$ est donc une inconnue secondaire.
Il vient alors que les $4-$uplets solutions de ce système sont les $4-$uplets de réels donnés par :

$$\begin{cases} x_1 & = & 1 & + & 2x_3 \\ x_1 & = & 2 & - & x_3 \\ x_3 & = & & & x_3 \\ x_4 & = & 2 & & \end{cases}, \text{ où } x_3 \in \mathbb{R}$$