Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question… **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

NOM | Prénom

Question de cours

Dans tout ce qui suit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{R}$.

(1). On dit que la série $\sum u_n$ est absolument convergente lorsque $\boxed{}$.

Lien convergence/absolue convergente : Si la série $\sum \boxed{}$ est convergente, alors la série $\sum \boxed{}$ est convergente.

(2). Soit $q \in \mathbb{R}$. On a : $\left(\text{La série } \sum q^n \text{ converge}\right) \Leftrightarrow \left(\boxed{}\right)$

En cas de convergence de la série $\sum q^n$, on a : $\forall m \in \mathbb{N},\ \sum_{n=m}^{+\infty} q^n = \boxed{}$.

(3). Les deux séries $\sum nq^{n-1}$ et $\sum n(n-1)q^{n-2}$ convergent si, et seulement si, $\boxed{}$.

En cas de convergence, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nq^{n-1} = \boxed{} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \boxed{}.$$

(4). Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a : $\left(\text{La série } \sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge}\right) \Leftrightarrow \left(\boxed{}\right)$

(5). **Majoration par une série convergente :** Soit $\sum u_n$ une série $\boxed{}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$.

Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite telle que $\begin{cases} \forall n \geq n_0, \boxed{} \\ \boxed{} \end{cases}$, alors la série $\sum u_n$ est convergente.

(6). **Critère d'équivalence :** si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont telles que $\begin{cases} \forall n \geq n_0, \boxed{} \\ \boxed{} \end{cases}$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont $\boxed{}$.

(7). On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite $\boxed{}$.

- Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \boxed{}$, alors la série $\sum u_n$ converge.
- Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \boxed{}$, alors la série $\sum u_n$ diverge.

Application directe du cours| [4886] | Somme d'une série par téléscopage

On considère la série $\sum u_n$ où : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \cos\left(\dfrac{1}{n+2}\right) - 2\cos\left(\dfrac{1}{n+1}\right) + \cos\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

On désigne par $(S_n)_{n\geq 1}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$, c'est à dire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

(1). Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \cos(1) - \cos\left(\dfrac{1}{2}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{n+1}\right) + \cos\left(\dfrac{1}{n+2}\right)$.
On pourra remarquer que $2 = 1 + 1$ et faire apparaître des sommes téléscopiques.

(2). En déduire la convergence de la série $\sum u_n$ et la valeur de sa somme.