Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

NOM | Prénom

Question de cours

Dans tout ce qui suit, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ où Ω est une partie de $\mathbb{R}^2$.

(1). Théorème de Schwarz : si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\boxed{}$ sur une partie $\boxed{}$ Ω de $\mathbb{R}^2$, alors :

$$\forall (a_1, a_2) \in \Omega, \quad \boxed{} = \boxed{}$$

(2). On dit que $(a_1, a_2) \in \Omega$ est un point critique de f lorsque $\boxed{}$.

(3). Lien point critique et extremum : on suppose que f est de classe $\boxed{}$ sur Ω qui est une partie $\boxed{}$ de $\mathbb{R}^2$. Si f admet un $\boxed{}$ en (a_1, a_2), alor (a_1, a_2) est un $\boxed{}$ de f.

(4). Soit $(r, t) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Pour $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & rx^2 + 2sxy + ty^2 \end{array} \right.$ une fonction quadratique, on note $\Delta = \boxed{}$ le discriminant de la fonction quadratique f.

- Si $\Delta < 0$, alors f est de $\boxed{}$ pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$ et dans ce cas f admet $\boxed{}$ en $(0, 0)$.
- Si $\Delta > 0$, alors f $\boxed{}$ sur $\mathbb{R}^2$.
- Si $\Delta = 0$, alors on a directement que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = \boxed{}$ si $r \neq 0$.

  f est donc du même signe que $\boxed{}$ et présente une $\boxed{}$ en lesquels f présente un $\boxed{}$: tous les points de la droite d'équation $\boxed{}$.

(5). Nature d'un point critique : soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & f(x, y) \end{array} \right.$ est une fonction de classe $\boxed{}$ sur $\mathbb{R}^2$. On suppose que $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ est un $\boxed{}$ de f et on considère la fonction quadratique q définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ q(x, y) = \boxed{}$$

Si le [ ] de la fonction quadratique q est [ ], alors f admet en (a_1, a_2) un [ ] qui est de [ ] que celui de la fonction q en [ ].

Application directe du cours| [4840] **| Extremum d'une fonction de $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$**

On considère $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y \end{array} \right.$.

(1). Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.

(2). Déterminer les points critiques de f.

(3). Étudier les éventuels extremums locaux de f.