Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

NOM | Prénom

Question de cours

(1). On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$ lorsque :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \boxed{}$$

On suppose pour la suite de cette question que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.

On a alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \boxed{}$ et : $\forall (m,p) \in \mathbb{N}^2,\ u_p = \boxed{}$

De plus : $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} u_k = \boxed{}$ et : $\sum_{k=p}^{n} u_k = \boxed{}$

(2). On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$ lorsque :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \boxed{}$$

On suppose pour la suite de cette question que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.

On a alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \boxed{}$ et : $\forall (m,p) \in \mathbb{N}^2,\ u_p = \boxed{}$

De plus pour $q \neq 1$: $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} u_k = \boxed{}$

et pour $q = 1$: $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} u_k = \boxed{}$

(3). Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2 telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$$

L'équation caractéristique associée à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $(\star)$: $\boxed{}$ d'inconnue r.

En notant Δ le discriminant de $(\star)$, on a :

Cas où $\Delta > 0$: $(\star)$ admet $\boxed{}$ et il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \boxed{}$$

Cas où $\Delta = 0$: $(\star)$ admet $\boxed{}$ et il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \boxed{}$$

(4). On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites réelles telle que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang n_0.

- On dira que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on note $\boxed{}$ lorsque $\boxed{}$.

- On dira que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on note $\boxed{}$ lorsque $\boxed{}$.

Application directe du cours| [4828]

Dans tout ce qui suit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite telle que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et (α,β,γ) un élément de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.
Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies ?

(1). $\dfrac{\ln(n)}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ ☐ Vrai | ☐ Faux

(2). $\dfrac{n^\alpha}{\mathrm{e}^{\gamma n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ ☐ Vrai | ☐ Faux

(3). $(\ln(n))^\beta \underset{n\to+\infty}{=} o(n^\alpha)$ ☐ Vrai | ☐ Faux

(4). $\mathrm{e}^{\gamma n} \underset{n\to+\infty}{=} o(n^\alpha)$ ☐ Vrai | ☐ Faux

(5). $\mathrm{e}^{u_n} + 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$ ☐ Vrai | ☐ Faux

(6). $\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$ ☐ Vrai | ☐ Faux

(7). $(1+u_n)^{\frac{1}{2}} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2u_n$ ☐ Vrai | ☐ Faux

(8). $1 - \sin(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{u_n^2}{2}$ ☐ Vrai | ☐ Faux

(9). $\tan(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$ ☐ Vrai | ☐ Faux

(10). $(1+u_n)^{\frac{1}{4}} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4}u_n$ ☐ Vrai | ☐ Faux