À noter & À garder en tête

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs... La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

NOM | Prénom

Question de cours

Dans tout ce qui suit, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ où Ω est une partie de $\mathbb{R}^2$.

(1). Théorème de Schwarz : si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur une partie ouverte Ω de $\mathbb{R}^2$, alors :

$$\forall (a_1, a_2) \in \Omega,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a_1, a_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a_1, a_2)$$

(2). On dit que $(a_1, a_2) \in \Omega$ est un point critique de f lorsque $\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2) & = & 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2) & = & 0 \end{array}\right.$.

(3). Lien point critique et extremum : on suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω qui est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$. Si f admet un extremum local en (a_1, a_2), alor (a_1, a_2) est un point critique de f.

(4). Soit $(r, t) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Pour $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & rx^2 + 2sxy + ty^2 \end{array}\right.$ une fonction quadratique, on note $\Delta = s^2 - rt$ le discriminant de la fonction quadratique f.

- Si $\Delta < 0$, alors f est de de signe constant pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$ et dans ce cas f admet un extremum en $(0, 0)$.
- Si $\Delta > 0$, alors f n'est pas de signe constant sur $\mathbb{R}^2$.
- Si $\Delta = 0$, alors on a directement que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = r\left(x + \dfrac{sy}{r}\right)$ si $r \neq 0$.
  f est donc du même signe que r et présente une inifinité de points en lesquels f présente un extremum : tous les points de la droite d'équation $x + \dfrac{sy}{r} = 0$.

(5). Nature d'un point critique : soit $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}\right.$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. On suppose que $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ est un point critique de f et on considère la fonction quadratique q définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ q(x,y) = \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a_1,a_2)}_{=r} x^2 + 2\underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a_1,a_2)}_{=s} xy + \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a_1,a_2)}_{=t} y^2$$

Si le le discriminant $\Delta = s^2 - rt$ de la fonction quadratique q est strictement négatif, alors f admet en (a_1, a_2) un extremum local qui est de même nature que celui de la fonction q en $(0, 0)$.

Application directe du cours| [4840] | Extremum d'une fonction de $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

On considère $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y \end{array}\right.$.

(1). Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.

(2). Déterminer les points critiques de f.

(3). Étudier les éventuels extremums locaux de f.

Éléments de correction

(1). Un calcul direct donne que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & 2x + y + 2 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & x + 2y + 3 \end{array}$

(2). On sait que : $\left(\begin{array}{c}(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ est un}\\ \text{point critique de } f\end{array}\right) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & 0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & 0\end{array}\right.$

Ainsi, on a : $\left(\begin{array}{c}(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ est un}\\ \text{point critique de } f\end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases}2x+\ \ y+2=0\\ x+2y+3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ =-\dfrac{1}{3}\\ y=-\dfrac{4}{3}\end{cases}$

(3). Par théorème, les extremums locaux de f sont à chercher parmi les points critiques de f, et on sait que ces derniers sont alors de même nature que ceux en $(0,0)$ de la fonction quadratique $q:(x,y)\longmapsto \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a_1,a_2)\,x^2+2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a_1,a_2)\,xy+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a_1,a_2)\,y^2$ où (a_1,a_2) est un point critique de f.

On a ici : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \begin{array}{rcl}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & = & 2\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) & = & 1\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) & = & 2\end{array}$

Comme $\left(-\dfrac{1}{3},-\dfrac{4}{3}\right)\in\mathbb{R}^2$ est le seul point critique de f, il s'agit donc d'étudier le signe de la forme quadratique $q:(x,y)\longmapsto 2x^2+2xy+2y^2$.
Le discriminant de cette dernière valant $\Delta=-3<0$, cette dernière est donc positive sur $\mathbb{R}^2$, et présente donc en $(0,0)$ un minimum.

En conséquence, $\left(-\dfrac{1}{3},-\dfrac{4}{3}\right)$ est un minimum local de f.