À noter & À garder en tête

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs... La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

NOM | Prénom

Question de cours

(1). On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$ lorsque :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r$$

On suppose pour la suite de cette question que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.

On a alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nr$ et : $\forall (m,p) \in \mathbb{N}^2,\ u_p = u_m + (p-m)\,r$

De plus : $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{u_0+u_n}{2} \times (n+1)$ et : $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} u_k = \frac{u_p+u_n}{2} \times (n-p+1)$

(2). On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$ lorsque :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = q \times u_n$$

On suppose pour la suite de cette question que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.

On a alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 \times q^n$ et : $\forall (m,p) \in \mathbb{N}^2,\ u_p = u_m \times q^{p-m}$

De plus pour $q \neq 1$: $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

et pour $q = 1$: $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1) \times u_0$

(3). Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2 telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$$

L'équation caractéristique associée à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $(\star)$: $ar^2 + br + c = 0$ d'inconnue r.

En notant Δ le discriminant de $(\star)$, on a :

Cas où $\Delta > 0$: $(\star)$ admet deux solutions réelles r_1 et r_2 et il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda \times (r_1)^n + \mu \times (r_2)^n$$

Cas où $\Delta = 0$: $(\star)$ admet une solution réelle r_0 et il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda \times n \times (r_0)^n + \mu \times (r_0)^n$$

(4). On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites réelles telle que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang n_0.

- On dira que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ lorsque $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
- On dira que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ lorsque $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Application directe du cours| [4828]

Dans tout ce qui suit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite telle que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et (α,β,γ) un élément de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies ?

(1). $\dfrac{\ln(n)}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$	☐ Vrai | ☐ Faux	**(6).** $\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$	☐ Vrai | ☐ Faux
(2). $\dfrac{n^\alpha}{\mathrm{e}^{\gamma n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$	☐ Vrai | ☐ Faux	**(7).** $(1+u_n)^{\frac{1}{2}} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2u_n$	☐ Vrai | ☐ Faux
(3). $(\ln(n))^\beta \underset{n\to+\infty}{=} o(n^\alpha)$	☐ Vrai | ☐ Faux	**(8).** $1-\sin(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{u_n^2}{2}$	☐ Vrai | ☐ Faux
(4). $\mathrm{e}^{\gamma n} \underset{n\to+\infty}{=} o(n^\alpha)$	☐ Vrai | ☐ Faux	**(9).** $\tan(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$	☐ Vrai | ☐ Faux
(5). $\mathrm{e}^{u_n}+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$	☐ Vrai | ☐ Faux	**(10).** $(1+u_n)^{\frac{1}{4}} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4}u_n$	☐ Vrai | ☐ Faux

Éléments de correction

(1). On sait que $(\ln(n))^\beta \underset{n\to+\infty}{=} o(n^\alpha)$ ce qui se traduit par $\dfrac{(\ln(n))^\beta}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc ici pour $\beta = 1$, il vient que $\dfrac{\ln(n)}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(2). On sait que $\dfrac{\mathrm{e}^{\gamma n}}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc par passage à l'inverse, on a $\dfrac{n^\alpha}{\mathrm{e}^{\gamma n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(3). C'est effectivement vrai...

(4). On sait que $\dfrac{\mathrm{e}^{\gamma n}}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc par passage à l'inverse, on a $\dfrac{n^\alpha}{\mathrm{e}^{\gamma n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ ce qui se traduit par $n^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} o(\mathrm{e}^{\gamma n})$.

(5). Puisque $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il vient par composition que $\mathrm{e}^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et donc que $\mathrm{e}^{u_n}+1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$ et finalement que $\mathrm{e}^{u_n}+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$.

(6). C'est effectivement vrai...

(7). On sait que $(1+u_n)^\alpha - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha u_n$, donc ici pour $\alpha = \dfrac{1}{2}$, on aura $(1+u_n)^{\frac{1}{2}} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}u_n$.

(8). Puisque $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il vient par composition que $\sin(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \underbrace{\sin(0)}_{=0}$ et donc que $1-\sin(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et donc que $1-\sin(u_n) \underset{n}{\sim} +\infty, 1$.

(9). C'est effectivement vrai...

(10). C'est effectivement vrai...