À noter & À garder en tête

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs... La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

NOM | Prénom

Question de cours

(1). On dit qu'une variable aléatoire réelle X est à densité lorsque sa fonction de répartition F est continue sur $\mathbb{R}$ et de de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.
Toute fonction $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}_+$ qui ne diffère de F' qu'en un nombre fini de points est appelé une densité de X.

(2). Soit X une variable aléatoire réelle à densité de fonction de répartition F.
Si f est une densité de X, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.
En revenant à la définition d'une fonction de répartition : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}\left([X \leq x]\right) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

(3). Soit X une variable aléatoire réelle à densité et f une densité de X. Si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, alors on dit que X admet une espérance $\mathbb{E}\left(X\right)$ définie par $\mathbb{E}\left(X\right) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$.

(4). Soit X une variable aléatoire réelle à densité admettant une espérance.
Si $\mathbb{P}\left([X \geq 0]\right) = 1$, alors $\mathbb{E}\left(X\right) \geq 0$.

(5). Soient X une variable aléatoire réelle de densité f et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.
Si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente, alors la variable aléatoire $g(X)$ admet une espérance et on a $\mathbb{E}\left(g(x)\right) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(t)\,\mathrm{d}t$.

(6). Si X est une variable aléatoire réelle à densité admettant un moment d'ordre 2 et un écart-type non nul, alors la variable aléatoire $X^* = \dfrac{X - \mathbb{E}\left(X\right)}{\sigma(X)}$ est centrée et réduite.
Si f est une densité de X, alors la fonction $f^* : t \longmapsto \sigma(X)f\left(\mathbb{E}\left(X\right) + \sigma(X)t\right)$ est une densité de X^*.

Application directe du cours| [1489] | Fonction de répartion et densité

On considère la fonction F donnée par :
$$F : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 2 \\ 1 - \dfrac{8}{x^3} & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases} \end{array}\right.$$

(1). Vérifier que F définit bien une fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité X.

(2). Déterminer ensuite une densité de probabilité de la loi de X.

Éléments de correction

(1). **Continuité de F sur $\mathbb{R}$:** la fonction F est clairement continue sur $]-\infty; 2[$ et sur $[2; +\infty[$.

De plus, on a : $f(x) \underset{\substack{x \to 2 \\ x < 2}}{\longrightarrow} 0$ et :
$$\begin{aligned} f(2) &= 1 - \frac{8}{2^3} \\ &= 1 - \frac{8}{8} \\ &= 0 \end{aligned}$$
donc F est continue en 2, et par suite F est continue sur $\mathbb{R}$.

Caractère $\mathcal{C}^1$ de F : F est clairement $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty; 2[$ et sur $[2; +\infty[$. Elle est donc $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points.

Limite de F en $-\infty$: il est immédiat que $F(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$.

Limite de F en $+\infty$: comme $\dfrac{8}{x^3} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a $F(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Croissance de F sur $\mathbb{R}$: La fonction F est constante sur $]-\infty;2[$, donc croissante sur cet intervalle.

La fonction $x \longmapsto \dfrac{8}{x^3}$ est décroissante sur $[2;+\infty[$, donc la fonction $x \longmapsto -\dfrac{8}{x^3}$ est croissante sur $[2;+\infty[$ et il est en de même pour la fonction $x \longmapsto 1-\dfrac{8}{x^3}$.

Par suite, comme F est continue en 2, elle est croissante sur $\mathbb{R}$.

(2). Un densité f de X est alors : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<2 \\ \dfrac{24}{x^4} & \text{si} \quad x\geq 2 \end{cases} \end{array} \right.$