À noter & À garder en tête

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . . La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

NOM | Prénom

Question de cours

(1). Donner les développements limités en 0 des fonctions suivantes à l'ordre indiqué :

$DL_4(0)$ de $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$: $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)$

$DL_4(0)$ de $x \longmapsto \mathrm{e}^{\,x}$: $\mathrm{e}^{\,x} = 1 + x + \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)$

$DL_5(0)$ de $x \longmapsto \cos(x)$ $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)$

$DL_4(0)$ de $x \longmapsto \ln(1+x)$: $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)$

$DL_3(0)$ de $x \longmapsto \sqrt{1+x}$: $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{8}x^2 + \dfrac{1}{16}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)$

(2). **Formule de Taylor-Young :** Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I et a un point intérieur à I. Alors f admet un $DL_n(a)$ donné par :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^n\right)$$

(3). Si A et B sont deux événements indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}$, alors $\begin{cases} \overline{A} \text{ et } B \\ A \text{ et } \overline{B} \\ \overline{A} \text{ et } \overline{B} \end{cases}$ sont également indépendants pour $\mathbb{P}$.

(4). Si F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle, alors :

(a). F est croissante sur R ;

(b). F est continue à droite en tout réel ;

(c). $F(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$ et $F(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

(5). On suppose que X est une variable aléatoire discrète de support $X(\Omega) = \{i,\, i \in I\}$ avec I partie de $\mathbb{N}$.
Si la série numérique $\sum_{i\in I} x_i \times \mathbb{P}([X = x_i])$ est absolument convergente alors on dira que X admet une espérance notée $\mathbb{E}(X)$ et on définit cette dernière comme étant la somme de a série numérique $\sum_{i\in I} x_i \times \mathbb{P}([X = x_i])$:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i\in I} x_i \times \mathbb{P}([X = x_i]).$$

Application directe du cours | [4795] | Développement limité d'un produit

(1). Former le développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction $g : x \longmapsto \ln(1-2x)$.

(2). Former ensuite le développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(1-2x)}{1+x}$

Éléments de correction

(1). Puisque $2x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, on a directement que : $g(x) = -2x - 2x^2 - \dfrac{8}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)$.

(2). En remarquant que $f(x) = \ln(1-2x) \times \dfrac{1}{1+x}$, il vient que :

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(-2x - 2x^2 - \frac{8}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)\left(1 - x + x^2 - x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) \\ &= -2x - \frac{8}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right) \end{aligned}$$