À noter & À garder en tête

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs... La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

NOM | Prénom

Question de cours

(1). On considère dans cette question une fonction f dont on note $\mathcal{D}_f$ son ensemble de définition.
On dit que $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à 0 lorsque : $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ -x \in \mathcal{D}_f$
On dit alors que f est impaire lorsque : $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à 0 et que : $\forall x \in \mathcal{D}_f, f(-x) = -f(x)$
Lorsque c'est le cas, sa représentation graphique dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'origine du repère.

(2). Indiquer pour chacune des fonctions ci-dessous, lesquelles sont paires et lesquelles sont impaires :

$$f_1 : x \longmapsto x^2 |\ f_2 : x \longmapsto x^3 |\ f_3 : x \longmapsto |x| |\ f_4 : x \longmapsto \cos(x) |\ f_5 : x \longmapsto \sin(x) |\ f_6 : x \longmapsto \tan(x)$$

Fonctions paires : f_1, f_3, f_4 **Fonctions impaires :** f_2, f_5, f_6

(3). Les fonctions $x \longmapsto \cos(x)$ et $x \longmapsto \sin(x)$ sont $2\pi-$périodiques.
Les fonctions $x \longmapsto \cos(\omega x + \varphi)$ et $x \longmapsto \sin(\omega x + \varphi)$ sont $\dfrac{2\pi}{\omega}-$périodiques.
La fonction $x \longmapsto \tan(x)$ est $\pi-$périodique.

(4). Propriétés de symétrie : Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos(-x) = \cos(x) \quad | \quad \cos(x+\pi) = -\cos(x) \quad | \quad \sin(-x) = -\sin(x) \quad | \quad \sin(\pi - x) = \sin(x)$$

(5). Transformer un cosinus en sinus et inversément : pour tout $x \in \mathbb{R}$;

$$\sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \quad | \ \cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

(6). Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$

$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$

$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$

$$\begin{aligned} \cos(2a) = &= \cos^2(a) - \sin^2(a) \\ &= 2\cos^2(a) - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2(a) \end{aligned}$$

Application directe du cours| [4796] | Manipuler les formules de trigonométries

Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier les deux expressions suivantes :

(1). $A(x) = \cos(x) + \cos\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \dfrac{4\pi}{3}\right)$

(2). $B(x) = \sin(x) + \sin\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \dfrac{4\pi}{3}\right)$

Éléments de correction

(1).
$$\begin{aligned} A(x) &= \cos(x) + \cos(x)\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \sin(x)\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \cos(x)\cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) - \sin(x)\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \\ &= \cos(x) - \frac{1}{2}\cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x) - \frac{1}{2}\cos(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

(2).
$$\begin{aligned} B(x) &= \sin(x) + \sin(x)\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \cos(x)\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \sin(x)\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \cos(x)\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \\ &= \sin(x) - \frac{1}{2}\sin(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) - \frac{1}{2}\sin(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$