À noter & À garder en tête

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs... La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Question de cours

Dans tout ce qui suit, on fera référence à une expérience aléatoire dont on note $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ l'espace probabilisé associé, et où l'on supposera que Ω est fini avec $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$.

(1). Soit X un variable aléatoire réelle finie sur Ω. On appelle fonction de répartition de X, la fonction F définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \mathbb{P}([X \leq x])$.

(2). Si 1 admet une espérance, alors X admet une variance, et dans ce cas : $\underbrace{\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - (\mathbb{E}(X))^2}_{\text{Formule de Huygens}}$.

(3). Si X est une variable aléatoire admettant une variance, alors pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $aX + b$ admet une variance et on a $\underbrace{\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)}_{\text{Bilinárité}}$.

(4). Si X suit la loi uniforme sur $[\![1; n]\!]$, alors $\mathbb{E}(X) = \dfrac{n+1}{2}$ et $\mathbb{V}(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$.

(5). Si X suit la loi de Bernoulli de paramètre p, alors $\mathbb{E}(X) = p$ et $\mathbb{V}(X) = p(1-p)$.

Application directe du cours| [4757] | Utiliser les formules pour les lois usuelles

(1). Dans cette question, on suppose que X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(12; \dfrac{1}{4}\right)$.

Donner $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

(2). Dans cette question, on suppose que X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(6; \dfrac{1}{3}\right)$.

(a). Calculer $\mathbb{P}([X = 3])$.

(b). Calculer $\mathbb{P}([X \leq 1])$.

On simplifiera au mieux le résultat.

Éléments de correction

(1). On sait que $\mathbb{E}(X) = 12 \times \dfrac{1}{4}$ c'est à dire $\mathbb{E}(X) = 3$.

De même, puisque $\mathbb{V}(X) = 12 \times \dfrac{1}{4} \times \left(1 - \dfrac{1}{4}\right)$, on en déduit que $\mathbb{V}(X) = \dfrac{9}{4}$.

(2). On sait dans ce cas que : $\forall k \in [\![0; 6]\!],\ \mathbb{P}([X = k]) = \dbinom{6}{k} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^k \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^{6-k}$

(a). En appliquant la formule précédente :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X=3]) &= \binom{6}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 \\ &= 20 \times \frac{1}{3^3} \times \frac{2^3}{3^3} \\ &= \frac{20 \times 8}{3^6} \\ &= \frac{160}{3^6}\end{aligned}$$

(b). Il est immédiat que :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X \leq 1]) &= \mathbb{P}([X=0]) + \mathbb{P}([X=1]) \\ &= \binom{6}{0} \times \left(\frac{1}{3}\right)^0 \times \left(\frac{2}{3}\right)^6 + \binom{6}{1} \times \left(\frac{1}{3}\right)^1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^5 \\ &= 1 \times \frac{2^6}{3^6} + 6 \times \frac{2^5}{3^6} \\ &= \frac{2^6 + 6 \times 2^5}{3^6}\end{aligned}$$