Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2080

Le but de cet exercice est d'établir des formules pour $\tan(a+b)$, $\tan(a-b)$ et $\tan(2a)$ ne faisant intervenir que $\tan(a)$ et $\tan(b)$.
On supposera dans tout l'exercice que les nombres a et b sont tels que $\tan(a+b)$, $\tan(a-b)$, $\tan(2a)$, $\tan(a)$ et $\tan(b)$ sont bien définis.

1. Rappelez la définition de $\tan(a)$ et $\tan(b)$.
2. Exprimez $\tan(a+b)$ en fonction de $\sin(a)$, $\sin(b)$, $\cos(a)$ et $\cos(b)$.
3. En remarquant que $\sin(a) = \tan(a)\cos(a)$ et $\sin(b) = \tan(b)\cos(b)$, et à l'aide d'une factorisation, exprimer alors $\tan(a+b)$ uniquement en fonction de $\tan(a)$ et $\tan(b)$.
4. Faire de même pour obtenir une formule donnant $\tan(a-b)$ uniquement en fonction de $\tan(a)$ et $\tan(b)$.
5. Exprimer ensuite $\tan(2a)$ uniquement en fonction de $\tan(a)$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 2370

Soient f et g les deux fonctions suivantes :

$$f : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+1-(2x+1)\ln(x) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad g : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\ln(x)}{x^2+x} \end{array} \right.$$

dont on note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives dans un repère orthogonal du plan.

1. On considère $h : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+2x\ln(x)+1 \end{array} \right.$.
   - **a.** Déterminer les variations de h sur $\mathbb{R}_+^*$.
   - **b.** En déduire le signe de h sur $\mathbb{R}_+^*$.
2.
   - **a.** Déterminer les limites en 0 et en $+\infty$ de f.
   - **b.** Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
   - **c.** En déduire le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
   - **d.** Justifier l'existence d'un unique réel α tel que $f(x) = 0$.
3.
   - **a.** Déterminer les limites en 0 et en $+\infty$ de g.
   - **b.** Exprimer $g(\alpha)$ en fonction de α.
   - **c.** Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
   - **d.** En déduire le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}_+^*$.
   - **e.** Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 1.
4. Construire $\mathcal{C}_g$.