Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 0454

Calculer le déterminant suivant et donner le résultat sous forme factorisée :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 4199

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Pour $\theta \neq 0 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\Delta_n(\theta) = \det\left(A + (2\cos(\theta)\mathrm{I}_n)\right)$.

1. Calculer $\Delta_1(\theta)$ et $\Delta_2(\theta)$.
2. Montrer que pour tout entier $n \geq 3$, on a : $\Delta_n(\theta) = 2\cos(\theta)\Delta_{n-1}(\theta) - \Delta_{n-2}(\theta)$.
3. Montrer par récurrence que : $\forall n \geq 1, \quad \Delta_n(\theta) = \dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$.
4. Donner alors les valeurs propres de A.