Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Travailler les fondamentaux

EX. 1 | Réf. 1365

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

1. Déterminer le noyau de A.

2. Quel est le rang de la matrice $A - \mathrm{I}_4$?

3. On donne $\chi_A(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 + \lambda^2$.
La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$?

EX. 2 | Réf. 0534

Dans cet exercice, on suppose que E est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension 4 dont on note $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_4}\right)$ une base.

Soit alors $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $\quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer $u\left(\overrightarrow{v_1}\right)$ où $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} - 2\overrightarrow{e_3} - 3\overrightarrow{e_4}$.

2. Calculer $u\left(\overrightarrow{v_2}\right)$ où $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{e_1} - 2\overrightarrow{e_2} - 2\overrightarrow{e_3} + 3\overrightarrow{e_4}$.

3. Montrer que 3 et -3 sont valeurs propres de u.

4. L'endomorphisme u est-il diagonalisable dans $\mathbb{R}$, et si oui, donner une base diagonalisante et la matrice de u dans cette base ?

Préparation à l'oral

EX. 3 | Réf. 1364

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée qui vérifie $A^3 + 3A^2 - A - 3\mathrm{I}_n = 0$. Montrer que si λ est une valeur propre de A, alors $\lambda \in \{-3, -1, 1\}$.

2. La matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ est telle que $M^3 + 3M^2 - M - 3\mathrm{I}_3 = (0)$. Est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$?

Mobiliser toutes ses connaissances

EX. 4 | Réf. 0539

On considère l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par :

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & P(1-X) \end{array} \right.$$

et soit $\mathcal{F} = (P_0, \ldots, P_3)$ la famille de polynômes où : $\forall k \in [\![0;3]\!]\,,\ P_k = \left(X - \frac{1}{2}\right)^k$.

1. Montrer que pour tout $k \in [\![0;3]\!]$, P_k est un vecteur propre de φ.

2. Montrer que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

3. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 5 | Réf. 1375

Déterminer les coefficients de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 1 & b' & c' \\ 1 & b'' & c'' \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ sachant que A admet pour vecteurs propres les trois matrices colonnes V_1, V_2 et V_3 où :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$