Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 4118

On considère les matrices carrées réelles d'ordre 3 suivantes : $\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2 et exprimer J comme combinaison linéaire de I_3 et A^2.

2. **a.** Montrer que A possède trois valeurs propres distinctes notées λ_1, λ_2 et λ_3 où l'on considérera pour la suite que $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.

b. Pour chaque entier $k \in \{1, 2, 3\}$, calculer un vecteur propre X_k associé à la valeur propre λ_k de A tel que l'élément de la première ligne de X_k soit égal à 1.

c. En déduire une matrice carrée réelle P d'ordre 3 inversible de première ligne égale à $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ telle qu'en notant $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ on ait $A = PDP^{-1}$.

3. Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$.

a. Exprimer M comme combinaison linéaire de I_3, A et J, puis comme combinaison linéaire de I_3, A, et A^2.

b. En déduire une matrice diagonale réelle Δ d'ordre 3 telle que $M = P\Delta P^{-1}$ où la matrice P est définie précédemment.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 1380

On considère un $\mathbb{R}-$ espace vectoriel E de dimension 4, et on note $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_4}\right)$ une base de E.

On considère alors les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On note f l'endomorphisme de E de matrice A dans la base $\mathcal{B}$.

1. Donner une base de $\mathrm{Im}\,(f)$ et $\mathrm{Ker}\,(f)$.

2. Soit $\overrightarrow{y}$ un vecteur non nul de $\mathrm{Im}\,(f)$.

a. Montrer que $\overrightarrow{y}$ est un vecteur propre de f. Quelle est la valeur propre associée ?

b. Déterminer les valeurs propres de f.

c. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Si oui, déterminer une base dans laquelle la matrice de f est diagonale.

3. **a.** Déterminer à l'aide des valeurs propres de A celles de B, ainsi que les sous-espaces propres correspondants.

b. Montrer que la matrice B est diagonalisable et diagonaliser B avec une matrice de passage dont les éléments de la première ligne et ceux de la dernière colonne sont égaux à 1.

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 3 | Réf. 1375

Déterminer les coefficients de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 1 & b' & c' \\ 1 & b'' & c'' \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ sachant que A admet pour vecteurs propres les trois matrices colonnes V_1, V_2 et V_3 où :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

EX. 4 | Réf. 1530

Soit $n \geq 2$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice dont le rang est égal à 1.

1. Démontrer qu'il existe un vecteur colonne non nul $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ et un vecteur ligne non nul $L = \begin{pmatrix} \ell_1 & \dots & \ell_n \end{pmatrix}$ tels que $A = CL$.

2. Démontrer que $A^2 = \mathrm{tr}(A)A$ où $\mathrm{tr}(A)$ désigne la trace de A, c'est à dire la somme des coefficients diagonaux de A.

3. En déduire que les seules valeurs propres possibles de A sont 0 et $\mathrm{tr}(A)$.

4. **a.** Le réel 0 est-il valeur propre de A. Quelle est la dimension de l'espace propre associé.

b. Le réel $\mathrm{tr}(A)$ est-il valeur propre de A ? Quelle est la dimension de l'espace propre associé ? *On distinguera suivant que* $\mathrm{tr}(A) = 0$ *ou non.*

5. Déduire des questions précédentes que :

$$A \text{ est diagonalisable} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{tr}(A) \neq 0$$

EX. 5 | Réf. 1385

Soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geq 3$. On désigne par $E = \mathbb{R}[X]$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace vectoriel de E constitué des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.
Soit alors $\Phi : \left| \begin{array}{lcl} E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & \left(X^2-1\right)P'' + XP' - 4P \end{array} \right.$.

1. Montrer que $\Phi \in \mathcal{L}(E)$ et que E_n est stable par Φ.

2. Soit P un polynôme de degré n. Quel est le degré de $\Phi(P)$? Quel est le noyau de Φ ?

3. On désigne par Φ_n la restriction de Φ à E_n.

a. Quelle est la forme de la matrice Φ_n dans la base canonique de E_n ?

b. L'application Φ_n est-elle diagonalisable ?