Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

Exercice| [2324] | 1| Limite d'une somme

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}$.

(1). Montrer que pour tout $n \geq 4$, on a : $u_n = 2 + \dfrac{2}{n} + \displaystyle\sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}}$

(2). Soit $n \geq 4$. Montrer que pour tout $k \in [\![2; n-2]\!]$, $\binom{n}{k} \geq \dfrac{n(n-1)}{2}$.

(3). En déduire un encadrement de u_n et montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 2.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [4354] | 2| Étude d'une suite récurrente

L'objet de ce problème consiste en l'étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$(\star) : \quad \begin{cases} u_0 \in \,]0;1[\\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 - u_n + 1} \end{cases}$$

Dans tout ce problème, f désignera la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x^2 - x + 1}$.

(1). Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R},\quad x^2 - x + 1 = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$.

(2). En déduire le domaine de définition de f, et justifer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini.

(3). À l'aide de la première question, montrer que : $\forall x \in [0;1],\quad f(x) \in [0;1]$.

(4). En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n \in [0;1]$.

(5). Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $f'(x)$.

(6). Dresser le tableau des variations de f sur $[0;1]$.

(7). Montrer que : $\forall x \in [0;1],\quad f(x) \geq x$.

(8). Montrer que : $\forall x \in [0;1],\quad |f'(x)| \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(9). Calculer $f(1)$.

(10). En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\quad |1 - u_{n+1}| \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}} |1 - u_n|$

(11). En déduire alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une majoration de $|1 - u_n|$ en fonction de n et de $|1 - u_0|$.

(12). En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.