Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2080

Le but de cet exercice est d'établir des formules pour $\tan(a+b)$, $\tan(a-b)$ et $\tan(2a)$ ne faisant intervenir que $\tan(a)$ et $\tan(b)$.
On supposera dans tout l'exercice que les nombres a et b sont tels que $\tan(a+b)$, $\tan(a-b)$, $\tan(2a)$, $\tan(a)$ et $\tan(b)$ sont bien définis.

1. Rappelez la définition de $\tan(a)$ et $\tan(b)$.
2. Exprimez $\tan(a+b)$ en fonction de $\sin(a)$, $\sin(b)$, $\cos(a)$ et $\cos(b)$.
3. En remarquant que $\sin(a)=\tan(a)\cos(a)$ et $\sin(b)=\tan(b)\cos(b)$, et à l'aide d'une factorisation, exprimer alors $\tan(a+b)$ uniquement en fonction de $\tan(a)$ et $\tan(b)$.
4. Faire de même pour obtenir une formule donnant $\tan(a-b)$ uniquement en fonction de $\tan(a)$ et $\tan(b)$.
5. Exprimer ensuite $\tan(2a)$ uniquement en fonction de $\tan(a)$.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2080

1. RAS
2. Utiliser les formules $\sin(a+b)$ et $\cos(a+b)$ et simplifier au mieux.
3. Suivre l'indication...
4. Reprendre en utilisant $\sin(a-b)$ et $\cos(a-b)$ et simplifier au mieux.
5. Ici $a=b$ et on utilise directement les formules trouvées.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 2370

Soient f et g les deux fonctions suivantes :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+1-(2x+1)\ln(x) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\ln(x)}{x^2+x} \end{array} \right.$$

dont on note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives dans un repère orthogonal du plan.

1. On considère $h : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+2x\ln(x)+1 \end{array} \right.$.
   a. Déterminer les variations de h sur $\mathbb{R}_+^*$.
   b. En déduire le signe de h sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. a. Déterminer les limites en 0 et en $+\infty$ de f.
   b. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
   c. En déduire le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
   d. Justifier l'existence d'un unique réel α tel que $f(x)=0$.
3. a. Déterminer les limites en 0 et en $+\infty$ de g.
   b. Exprimer $g(\alpha)$ en fonction de α.
   c. Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
   d. En déduire le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}_+^*$.

e. Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 1.

4. Construire $\mathcal{C}_g$.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2370

1. a. Calculer $h'(x)$ pour étudier son signe.

b. Compléter le tableau de variation de sorte à en déduire le signe de h.

2. a. Identifier les éventuelles formes indéterminées, et les gérer.

b. RAS

c. Étudier le signe de la dérivée de f après l'avoir mis sous une forme adaptée à une étude de signe et chercher un lien avec h.

d. Utiliser (proprement) le théorème des valeurs intermédiaires.

3. a. Identifier les éventuelles formes indéterminées, et les gérer.

b. Utiliser le fait que $f(\alpha) = 0$ et voir le lien avec $g(\alpha)$.

c. RAS

d. Remarquer qu'il y a un lien entre f et g'.

e. Utiliser la formule donnant l'équation réduite de la tangente à une courbe et la simplifier au mieux.

4. Exploiter les éléments précédents pour construire $\mathcal{C}_g$.