Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2298

Résoudre le système suivant à l'aide de son écriture matricielle :

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 11 \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 10 \\ -3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5 = -16 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 3x_4 - x_5 = 5 \end{cases}$$

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2298

- On écrit la matrice augmentée du système ;
- On fait opérer l'algorithme de Gauss en n'oubliant pas d'indiquer toutes les opérations sur les lignes effectuées.

EX. 2 | Réf. 2299

Soient $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2} \end{array} \right.$ et $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \end{array} \right.$.

On remarquera que l'étude de g a déjà été faite dans un devoir précédent et on pourra réutiliser, en les rappelant, les résultats établis dans ce devoir.

1. **Préliminaire :** montrer que $\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$.
2. Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et admet une fonction réciproque g^{-1}.
3. Justifier que f et g sont réciproques l'une de l'autre.
4. Résoudre l'équation $f(x) = 1$.
5. Sans utiliser l'expression de $g'(x)$, déterminer la valeur de $g'(1)$.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2299

- Utiliser $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ pour transformer le dénominateur.
- Utiliser (correctement) le théorème d'existence d'un fonction réciproque pour une fonction continue.
- Vérifier que $f(g(x)) = x$ ou $g(f(x)) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- Écrire l'équation $f(x) = 1$, la multiplier par e^{x} (en justifiant...), puis poser $\mathrm{e}^{x} = X$.
- Utiliser la formule liant la dérivée de f et celle de f^{-1}.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 2297

L'intensite $I(\lambda)$ du rayonnement d'une étoile pour une longueur d'onde λ ($\lambda > 0$) est donnée par :

$$I(\lambda) = \frac{1}{\lambda^5} \mathrm{e}^{-\frac{K}{\lambda}}$$

où K est une constante positive qui dépend de l'étoile.

1. Démontrer que l'intensité $I(\lambda)$ rayonnée par l'étoile est maximale pour une valeur λ_0 de λ que l'on déterminera en fonction de la constante K.
2. Déduisez-en $I(\lambda_0)$.

EX. 3 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2297

- Il s'agit d'étudier une fonction ! On se posera la question de savoir s'il est nécessaire de calculer les limites. . .
- Dès lors que l'on a λ_0, il faut évaluer I en λ_0.