Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 0454

Calculer le déterminant suivant et donner le résultat sous forme factorisée :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 0454

- On distinguera le cas $a = 1$ et $a \neq 1$ dans un premier temps.
- L'idée est d'utiliser la quatrième colonne pour mettre un maximum de 0 dans les autres colonnes...
- ...puis dans la quatrième ligne, ramener une combinaison linéaire d'autres lignes de sorte à y avoir un seul coefficient non nul.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 4199

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Pour $\theta \neq 0 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\Delta_n(\theta) = \det\left(A + (2\cos(\theta)\mathrm{I}_n)\right)$.

1. Calculer $\Delta_1(\theta)$ et $\Delta_2(\theta)$.
2. Montrer que pour tout entier $n \geq 3$, on a : $\Delta_n(\theta) = 2\cos(\theta)\Delta_{n-1}(\theta) - \Delta_{n-2}(\theta)$.
3. Montrer par récurrence que : $\forall n \geq 1, \quad \Delta_n(\theta) = \dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$.
4. Donner alors les valeurs propres de A.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4199

1. C'est un calcul direct.
2. Développer deux fois suivant une ligne ou une colonne pour obtenir la relation proposée.
3. On effectue le raisonnement par récurrence demandé en utilisant en particulier ses formules de trigonométrie.
4. Exploiter le calcul de $\Delta_n(\theta)$ par rapport au problème de recherche de valeurs propres pour A.