Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Travailler les fondamentaux

EX. 1 | Réf. 1365

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

1. Déterminer le noyau de A.
2. Quel est le rang de la matrice $A - \mathrm{I}_4$?
3. On donne $\chi_A(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 + \lambda^2$.
   La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$?

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 1365

1. On procèdera à un échelonnement du système de représentation matricielle $(A|0)$ dont on interprétera les solutions pour donner le noyau de A.
2. On procèdera à un échelonnement en ligne de la matrice $A - \mathrm{I}_4$.
3. Les deux questions précédentes donnent des informations sur les valeurs propres de A, ainsi que sur la dimension de sous-espaces propres associés. Il suffira donc d'intepréter ces résultats pour conclure quant à la diagonalisabilité de A.

EX. 2 | Réf. 0534

Dans cet exercice, on suppose que E est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension 4 dont on note $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_4}\right)$ une base.

Soit alors $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $\quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer $u\left(\overrightarrow{v_1}\right)$ où $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} - 2\overrightarrow{e_3} - 3\overrightarrow{e_4}$.
2. Calculer $u\left(\overrightarrow{v_2}\right)$ où $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{e_1} - 2\overrightarrow{e_2} - 2\overrightarrow{e_3} + 3\overrightarrow{e_4}$.
3. Montrer que 3 et -3 sont valeurs propres de u.
4. L'endomorphisme u est-il diagonalisable dans $\mathbb{R}$, et si oui, donner une base diagonalisante et la matrice de u dans cette base ?

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 0534

1. On pourra utiliser les représentations matricielles de u et $\overrightarrow{v_1}$ pour calculer $u\left(\overrightarrow{v_1}\right)$.
2. On pourra utiliser les représentations matricielles de u et $\overrightarrow{v_2}$ pour calculer $u\left(\overrightarrow{v_2}\right)$.
3. On pourra montrer que les deux matrices $A \pm 3\mathrm{I}_3$ ne sont pas inversibles.
4. Il suffit d'interpréter les résultats des questions précédentes en terme de valeurs propres par rapport à la dimension de E.

BY NC ND

Préparation à l'oral

EX. 3 | Réf. 1364

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée qui vérifie $A^3 + 3A^2 - A - 3\mathrm{I}_n = 0$. Montrer que si λ est une valeur propre de A, alors $\lambda \in \{-3, -1, 1\}$.
2. La matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ est telle que $M^3 + 3M^2 - M - 3\mathrm{I}_3 = (0)$. Est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$?

EX. 3 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 1364

1. On pourra remarquer que $A^2X = \lambda^2 X$ où $X \in E_\lambda(A)$ et itérer ce processus, pour obtenir un polynôme de degré 3 dont λ est racine.
2. On exploite directement le résultat de la question précédente pour avoir une liste de valeurs propres potentielles, que l'on vérifie par exemple en s'intéressant à l'inversibilité des matrices $M + \lambda\mathrm{I}_3$.

Mobiliser toutes ses connaissances

EX. 4 | Réf. 0539

On considère l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par :

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & P(1-X) \end{array} \right.$$

et soit $\mathcal{F} = (P_0, \ldots, P_3)$ la famille de polynômes où : $\quad \forall k \in [\![0;3]\!]\,,\ P_k = \left(X - \dfrac{1}{2}\right)^k$.

1. Montrer que pour tout $k \in [\![0;3]\!]$, P_k est un vecteur propre de φ.
2. Montrer que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

EX. 4 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 0539

1. On calcule $\varphi(P_k)$ et on montre qu'il est colinéaire à P_k.
2. $\mathcal{F}$ est une famille de polynômes de degrés échelonnés...
3. La réponse vient de la question précédente en utilisant la définition de ce qu'est un endomorphisme diagonalisable.

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 5 | Réf. 1375

Déterminer les coefficients de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 1 & b' & c' \\ 1 & b'' & c'' \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ sachant que A admet pour vecteurs propres les trois matrices colonnes V_1, V_2 et V_3 où :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

EX. 5 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 1375