À noter & À garder en tête

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout.
Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

Exercice| [4839] | 1

On considère la fonction f donnée par $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \left\{\begin{array}{rl} 0 & \text{si} \quad t<0 \\ \lambda^2 t\mathrm{e}^{-\lambda t} & \text{si} \quad t \geq 0 \end{array}\right. \end{array}\right.$

(1). Montrer que f est une densité de probabilité.
Dans tout ce qui suit, X désigne alors une variable aléatoire de densité f.

(2). Déterminer la fonction de répartition F de X.

(3). Montrer que X admet une espérance et une variance et que l'on a $\mathbb{E}(X) = \dfrac{2}{\lambda}$ et $\mathbb{V}(X) = \dfrac{2}{\lambda^2}$.

Pistes de réflexion

(1). On s'assure du caractère continue de f sauf en un nombre fini de points, de son caractère positif, et de la convergence et de la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

(2). On se souviendra que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = f'(x)$.

(3). Il s'agit donc de s'assurer de la convergence et de la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$ et de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ avant de pouvoir utiliser la formule de Huygens, en essayant de réinvestir pertinemment des calculs d'intégrales précédemment effectués.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [4838] | 2| Temps d'attente

On ouvre un guichet au temps 0 où des clients se présentent à ce guichet aux instants aléatoires T_1, T_2,. . . .
On suppose que les variables aléatoires E_1, E_2,. . . définies sur un espace probabilisé par

$$\left\{\begin{array}{lcl} E_1 & = & T_1 \\ E_2 & = & T_2 - T_1 \\ E_3 & = & T_3 - T_2 \\ & \vdots & \end{array}\right.$$

sont mutuellement indépendantes et suivent la même loi exponentielle de même espérance $\lambda > 0$.
On note alors X le nombre de clients arrivant dans l'intervalle de temps $[0; 1]$.

On admettra que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n donnée par $f_n(x) = \left\{\begin{array}{ccc} \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}\lambda^n \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si} & x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} & \end{array}\right.$ est une densité de probabilité.

(1). Exprimer T_n en fonction de $E_1, \ldots, E_n$, et on admettra pour la suite que T_n est une variable aléatoire de densité f_n.

(2). Calculer $\mathbb{P}([X = 0])$.

(3). Montrer que : $\forall n \geq 1, \quad \mathbb{P}([X=n]) = \mathbb{P}([T_{n+1}>1]) - \mathbb{P}([T_n>1])$

(4). En déduire la loi de X.

(5). On pose, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $E_i = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(U_i)$, où U_1, U_1, sont des variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes de même loi uniforme sur $[0;1]$.
On considère la variable aléatoire Y donnée par :

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad U_1 < \mathrm{e}^{-\lambda} \\ \min\left\{n \in \mathbb{N}^*,\, U_1U_2\dots U_n < \mathrm{e}^{-\lambda}\right\} & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que les variables aléatoires X et Y ont la même loi.

Pistes de réflexion

(1). On interprête chaque E_i comme le temps écoulé entre l'arrivée de deux clients et T_n comme le temps que mettra le n^{e} client pour se présenter à compter de l'origine.

(2). On cherchera à exprimer $[X=0]$ et un événement lié à T_1.

(3). On cherchera à exprimer $[X=n]$ et des événement liés à T_n et T_{n+1}.

(4). On exploitera la relation de la question précédente en faisant intervenir les intégrales définissant $\mathbb{P}([1<T_{n+1}])$ et $\mathbb{P}([1<T_n])$ pour reconnaître une loi discrète usuelle.

(5). On commencera par justifier que $[X=0]=[Y=0]$, puis que $[X=n]=[Y=n]$ pour $n \geq 1$ en revenant à la définition de $[X=n]$ à partir des variables aléatoires $E_1, \dots, E_n$.