Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . . La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2298

Résoudre le système suivant à l'aide de son écriture matricielle :

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 11 \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 10 \\ -3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5 = -16 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 3x_4 - x_5 = 5 \end{cases}$$

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 2298

On échelonne le système à l'aide de l'algorithme de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 & -1 & 11 \\ -2 & 1 & -4 & 3 & 2 & 10 \\ -3 & 2 & 3 & 1 & -2 & -16 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 3 & -1 & 5 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 1L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + \frac{3}{2}L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1}{2}L_1 \\ L_5 \leftarrow L_5 - 1L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 & -1 & 11 \\ 0 & -2 & -3 & 5 & 1 & 21 \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{9}{2} & 4 & -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{5}{2} & -\frac{9}{2} \\ 0 & 7 & -3 & 1 & 0 & -6 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{5}{4}L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + \frac{7}{4}L_2 \\ L_5 \leftarrow L_5 + \frac{7}{2}L_2}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 & -1 & 11 \\ 0 & -2 & -3 & 5 & 1 & 21 \\ 0 & 0 & \frac{33}{4} & -\frac{9}{4} & -\frac{19}{4} & -\frac{103}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{27}{4} & \frac{39}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{129}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{27}{2} & \frac{37}{2} & \frac{7}{2} & \frac{135}{2} \end{array}\right) \underset{\substack{L_4 \leftarrow L_4 + \frac{9}{11}L_3 \\ L_5 \leftarrow L_5 + \frac{18}{11}L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 & -1 & 11 \\ 0 & -2 & -3 & 5 & 1 & 21 \\ 0 & 0 & \frac{33}{4} & -\frac{9}{4} & -\frac{19}{4} & -\frac{103}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{87}{11} & -\frac{51}{11} & \frac{123}{11} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{163}{11} & -\frac{47}{11} & \frac{279}{11} \end{array}\right)$$

$$\underset{L_5 \leftarrow L_5 - \frac{163}{87}L_4}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 & -1 & 11 \\ 0 & -2 & -3 & 5 & 1 & 21 \\ 0 & 0 & \frac{33}{4} & -\frac{9}{4} & -\frac{19}{4} & -\frac{103}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{87}{11} & -\frac{51}{11} & \frac{123}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{128}{29} & \frac{128}{29} \end{array}\right) \underset{\substack{L_4 \leftarrow L_4 + \frac{1479}{1408}L_5 \\ L_3 \leftarrow L_3 + \frac{551}{512}L_5 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{29}{128}L_5 \\ L_1 \leftarrow L_1 + \frac{29}{128}L_5}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 & 0 & 12 \\ 0 & -2 & -3 & 5 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & \frac{33}{4} & -\frac{9}{4} & 0 & -21 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{87}{11} & 0 & \frac{174}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{128}{29} & \frac{128}{29} \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + \frac{33}{116}L_4 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{55}{87}L_4 \\ L_1 \leftarrow L_1 - \frac{22}{87}L_4}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & -2 & -3 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & \frac{33}{4} & 0 & 0 & -\frac{33}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{87}{11} & 0 & \frac{174}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{128}{29} & \frac{128}{29} \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + \frac{4}{11}L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - \frac{4}{33}L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{33}{4} & 0 & 0 & -\frac{33}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{87}{11} & 0 & \frac{174}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{128}{29} & \frac{128}{29} \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{3}{2}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{33}{4} & 0 & 0 & -\frac{33}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{87}{11} & 0 & \frac{174}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{128}{29} & \frac{128}{29} \end{array}\right) \underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{4}{33}L_3 \\ L_4 \leftarrow \frac{11}{87}L_4 \\ L_5 \leftarrow \frac{29}{128}L_5}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

En notant x_1, …, x_5 les inconnues du système, on en déduit les relations :

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = -2 \\ x_4 = 2 \\ x_5 = 1 \end{cases}$$

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 2300

Soit $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(x^2)+1}{\ln(x^2)-1}$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Étudier la parité de f. Qu'en déduire éventuellement pour $\mathcal{C}_f$ et sur quel ensemble étudier alors f ?
3. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Interpréter graphiquement ces dernières.
4. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{\mathrm{e}}, 0, \sqrt{\mathrm{e}}\}$, $\quad f'(x) = -\dfrac{4}{x\left(\ln(x^2)-1\right)^2}$.
5. Étudier alors le signe de $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0, \sqrt{\mathrm{e}}\}$, puis construire le tableau de variation de f.
6. En posant $f(0) = 1$, déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ et interpréter graphiquement ce résultat.
7. Résoudre l'équation $f(x) = 0$. Comment interpréter graphiquement les solutions de cette équation ?
8. Donner l'équation réduite des tangentes à $\mathcal{C}_f$ au(x) point(s) où cette dernière coupe l'axe des abscisses.
9. Donner une ébauche de $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ du plan dont on choisira au préalablement l'unité graphique.
   On fera figurer tous les éléments mis en évidence dans les questions précédentes.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 2300

1. L'expression $f(x)$ n'a de sens que si :
   - son numérateur existe, autrement dit si $\ln(x^2)$ existe, ce qui est le cas si $x^2 > 0$ soit $x \neq 0$ puisque $x^2 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;
   - son dénominateur existe, autrement dit si $\ln(x^2)$ existe, ce qui est le cas si $x^2 > 0$ soit $x \neq 0$ puisque $x^2 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;
   - son dénominateur ne s'annule pas, c'est à dire si $\ln(x^2) - 1 \neq 0$. Or $\ln(x^2) - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \mathrm{e} \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{\mathrm{e}}$ ou $-\sqrt{\mathrm{e}}$.

   Ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{\mathrm{e}}, 0, \sqrt{\mathrm{e}}\}$.
2. - $\mathcal{D}_f$ est clairement symétrique par rapport à 0 ;
   - $$\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad f(-x) = \frac{\ln\left((-x)^2\right)+1}{\ln\left((-x)^2\right)-1} = \frac{\ln(x^2)+1}{\ln(x^2)-1} = f(x)$$

   et ainsi f est paire. On en déduit ainsi qu'il suffit d'étudier f sur $\mathbb{R}_+ \setminus \{-\sqrt{\mathrm{e}}, 0, \sqrt{\mathrm{e}}\}$, la totalité de $\mathcal{C}_f$ se déduira par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.
3. Compte-tenu de la parité de f on détermine « seulement »
   - $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = ?}$: $\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad f(x) = \dfrac{\ln(x^2)\left(1 + \dfrac{1}{\ln(x^2)}\right)}{\ln(x^2)\left(1 - \dfrac{1}{\ln(x^2)}\right)} = \dfrac{1 + \dfrac{1}{\ln(x^2)}}{1 - \dfrac{1}{\ln(x^2)}}$.

   Comme $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x^2) = -\infty$, on en déduit que $f(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 1$

- $\boxed{\lim_{x\to 0+\infty} f(x) = ?}$: $\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad f(x) = \dfrac{\ln(x^2)\left(1+\dfrac{1}{\ln(x^2)}\right)}{\ln(x^2)\left(1-\dfrac{1}{\ln(x^2)}\right)} = \dfrac{1+\dfrac{1}{\ln(x^2)}}{1-\dfrac{1}{\ln(x^2)}}$.

  Comme $\lim_{x\to+\infty} \ln\left(x^2\right) = +\infty$, on en déduit que $f(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 1$ et que $\mathcal{C}_f$ présente une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $+\infty$.
- $\boxed{\lim_{x\to\sqrt{\mathrm{e}}} f(x) = ?}$ en distinguant éventuellement la limte à gauche et la limite à droite. On a $\lim_{x\to\sqrt{\mathrm{e}}} \ln\left(x^2\right) = 1$, donc $\lim_{x\to\sqrt{\mathrm{e}}} \ln\left(x^2\right) + 1 = 2$ et $\lim_{x\to\sqrt{\mathrm{e}}} \ln\left(x^2\right) - 1 = 0$.

  Or $\ln\left(x^2\right) - 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \geq \mathrm{e} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left]-\infty; -\sqrt{\mathrm{e}}\right] \cup \left[\sqrt{\mathrm{e}}; +\infty\right[$.

  Il vient alors que $\lim_{x\to\sqrt{\mathrm{e}}^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to\sqrt{\mathrm{e}}^-} f(x) = -\infty$ et on en déduira que $\mathcal{C}_f$ possède une asymptote verticale d'équation $x = \sqrt{\mathrm{e}}$.

4. $\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad f'(x) = \dfrac{\dfrac{2x}{x^2} \times \left(\ln\left(x^2\right) - 1\right) - \left(\ln\left(x^2\right) + 1\right) \times \dfrac{2x}{x^2}}{\left(\ln\left(x^2\right) - 1\right)^2} = \dfrac{\dfrac{2}{x} \times (-2)}{\left(\ln\left(x^2\right) - 1\right)^2} = -\dfrac{4}{x\left(\ln\left(x^2\right) - 1\right)^2}$

5. Le signe de f sur $\mathbb{R}_+ \setminus \{-\sqrt{\mathrm{e}}, 0, \sqrt{\mathrm{e}}\}$ est clairement donné par celui de $-\dfrac{4}{x}$ qui est strictement négatif. Ainsi, on en déduit le tableau de variation de f :

x	0		$\sqrt{\mathrm{e}}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$-$	‖	$-$	
Variations de f	‖ 1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1

6. $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{f(x) - 1}{x} = \dfrac{\dfrac{\ln\left(x^2\right) + 1}{\ln\left(x^2\right) - 1} - 1}{x} = \dfrac{2}{x\left(\ln\left(x^2\right) - 1\right)} = \dfrac{2}{x} \times \dfrac{1}{\ln\left(x^2\right) - 1}$

Comme $\dfrac{2}{x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} = +\infty$ et $\lim_{x\to 0^+} \ln\left(x^2\right) = -\infty$, il vient que $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} = -\infty$ et donc $\mathcal{C}_f$ présente une tangente verticale au point d'abscisse 1.

7. On résout l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}_+ \setminus \{0, \sqrt{\mathrm{e}}\}$, les autres points d'intersection se déduiront par symétrie.

$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(x^2\right) + 1 = 0 \quad$ et $\quad \ln\left(x^2\right) - 1 \neq 0$ et donc $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses sur sa partie

$\Leftrightarrow \quad x = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$

positive au point d'abscisse $\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.

8. On détermine seulement celle au point d'abscisse $x = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$, l'autre se déduira par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

L'équation réduite de cette tangente est donc donnée par : $y = f'\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right) + \underbrace{f\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)}_{0}$.

Par ailleurs, $f'\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right) = -\dfrac{4}{\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\left(\ln\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right) - 1\right)^2} = -\dfrac{4\sqrt{\mathrm{e}}}{(-1-1)^2} = -\sqrt{\mathrm{e}}$.

Ainsi, l'équation recherchée est $y = -\sqrt{\mathrm{e}}\left(x - \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)$.

9. On obtient ainsi :