

Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le résultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs... La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2080

Le but de cet exercice est d'établir des formules pour $\tan(a+b)$, $\tan(a-b)$ et $\tan(2a)$ ne faisant intervenir que $\tan(a)$ et $\tan(b)$.

On supposera dans tout l'exercice que les nombres a et b sont tels que $\tan(a+b)$, $\tan(a-b)$, $\tan(2a)$, $\tan(a)$ et $\tan(b)$ sont bien définis.

1. Rappelez la définition de $\tan(a)$ et $\tan(b)$.
2. Exprimez $\tan(a+b)$ en fonction de $\sin(a)$, $\sin(b)$, $\cos(a)$ et $\cos(b)$.
3. En remarquant que $\sin(a) = \tan(a) \cos(a)$ et $\sin(b) = \tan(b) \cos(b)$, et à l'aide d'une factorisation, exprimer alors $\tan(a+b)$ uniquement en fonction de $\tan(a)$ et $\tan(b)$.
4. Faire de même pour obtenir une formule donnant $\tan(a-b)$ uniquement en fonction de $\tan(a)$ et $\tan(b)$.
5. Exprimer ensuite $\tan(2a)$ uniquement en fonction de $\tan(a)$.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 2080

1. On a $\tan(a) = \frac{\sin(a)}{\cos(a)}$ et $\tan(b) = \frac{\sin(b)}{\cos(b)}$.
2. En utilisant les formules donnant $\sin(a+b)$ et $\cos(a+b)$ on obtient :

$$\begin{aligned}\tan(a+b) &= \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} \\ &= \frac{\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)}\end{aligned}$$

3. En poursuivant le calcul précédent :

$$\begin{aligned}\tan(a+b) &= \frac{\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)} \\ &= \frac{\tan(a)\cos(a)\cos(b) + \tan(b)\cos(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b) - \tan(a)\cos(a)\tan(b)\cos(b)} \\ &\quad \text{et en mettant en facteur } \cos(a)\cos(b) \text{ au numérateur et au dénominateur} \\ &= \frac{\cos(a)\cos(b)(\tan(a) + \tan(b))}{\cos(a)\cos(b)(1 - \tan(a)\tan(b))} \\ &= \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}\end{aligned}$$

4. Sur le même principe, on trouverait : $\tan(a-b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$.
5. En écrivant $\tan(2a) = \tan(a+a)$, on trouvera : $\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1 - \tan^2(a)}$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 2370

Soient f et g les deux fonctions suivantes :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x + 1 - (2x + 1)\ln(x) \end{cases} \quad \text{et} \quad g : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{\ln(x)}{x^2 + x} \end{cases}$$

dont on note C_f et C_g les courbes représentatives dans un repère orthogonal du plan.

1. On considère $h : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x + 2x \ln(x) + 1 \end{cases}$.
 - a. Déterminer les variations de h sur \mathbb{R}_+^* .
 - b. En déduire le signe de h sur \mathbb{R}_+^* .
2. a. Déterminer les limites en 0 et en $+\infty$ de f .
 - b. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
 - c. En déduire le tableau de variations complet de f sur \mathbb{R}_+^* .
 - d. Justifier l'existence d'un unique réel α tel que $f(x) = 0$.
3. a. Déterminer les limites en 0 et en $+\infty$ de g .
 - b. Exprimer $g(\alpha)$ en fonction de α .
 - c. Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
 - d. En déduire le tableau de variations de g sur \mathbb{R}_+^* .
 - e. Déterminer l'équation réduite de la tangente à C_g au point d'abscisse 1.
4. Construire C_g .

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 2370

1. a. On a directement que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad h'(x) = 1 + 2 \ln(x) + 2x \times \frac{1}{x} = 3 + 2 \ln(x)$$

Ainsi, $h'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > -\frac{3}{2}$, c'est à dire $x > e^{-\frac{3}{2}}$ et $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^{-\frac{3}{2}}$.

On en déduit le tableau de variations de h :

x	0	$e^{-\frac{3}{2}}$	$+\infty$
Signe de $h'(x)$		-	+
Variations de h			
Signe de $h(x)$		+	

b. Comme $h\left(e^{-\frac{3}{2}}\right) = \dots = 1 - \frac{2}{e^{-\frac{3}{2}}} > 0$, il vient que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $h(x) > 0$, d'où le signe de h .

2. a. Limite en 0 : en développant l'expression de f , il vient :

$$\underbrace{x+1}_{\xrightarrow{x \rightarrow 0} 1} - 2 \underbrace{x \ln(x)}_{\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0} - \underbrace{\ln(x)}_{\xrightarrow{x \rightarrow 0} -\infty} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\infty$$

Limite en $+\infty$: en factorisant l'expression de f par $(2x + 1)$, il vient :

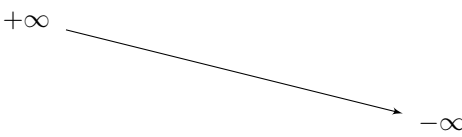
$$\underbrace{(2x+1)}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty} \left(\underbrace{\frac{x+1}{2x+1}}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{2+\frac{1}{2x}}} - \underbrace{\ln(x)}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty} \right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$$

$-\infty$

b. On trouve que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \frac{1 - 2 \times \ln(x) - \frac{2x+1}{x}}{x} = \frac{-x - 2x \ln(x) - 1}{x^2} = -\frac{h(x)}{x}$$

c. On en déduit ainsi :

x	0	α	$+\infty$
Signe de $h(x)$		+	
Signe de $f'(x)$		-	
Variations de f		$+\infty$  $-\infty$	
Signe de $f(x)$		+	-

d. La fonction f est telle que :

- f est continue sur $]0; +\infty[$
- f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ donc sont de signe opposées

donc par le théorème des valeurs intermédiaires dans le cas strictement monotone, on en déduit que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

3. a. **Limite en 0** : il vient directement puisque $x^2 + x > 0$ sur \mathbb{R}_+^* :

$$\underbrace{\frac{\ln(x)}{x^2 + x}}_{\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\infty$$

Limite en $+\infty$: en factorisant au numérateur par x^2 , il vient :

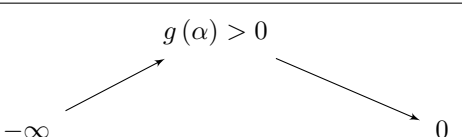
$$\underbrace{\frac{\ln(x)}{x^2}}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0} \times \frac{1}{\underbrace{1 + \frac{1}{x}}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

b. Par définition $g(\alpha) = \frac{\ln(\alpha)}{\alpha^2 + \alpha}$ et $f(\alpha) = 0$. Or $f(\alpha) = \alpha + 1 - (2\alpha + 1)\ln(\alpha)$ et ainsi $\ln(\alpha) = \frac{\alpha + 1}{2\alpha + 1}$. Par suite, il vient $g(\alpha) = \frac{1}{\alpha(2\alpha + 1)}$

c. On obtient :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g'(x) &= \frac{\frac{1}{x} \times (x^2 + x) - \ln(x) \times (2x + 1)}{(x^2 + x)^2} \\ &= \frac{x + 1 - (2x + 1)\ln(x)}{(x^2 + x)^2} \\ &= \frac{f(x)}{(x^2 + x)^2} \end{aligned}$$

d. On en déduit donc directement que :

x	0	α	$+\infty$
Signe de $f(x)$		+	-
Signe de $g'(x)$		+	-
Variations de g		$-\infty$  0	

e. L'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 1 pour g est ainsi :

$$y = g'(1)(x - 1) + g(1).$$

Or $g'(1) = \frac{1}{2}$ et $g(1) = 0$, et ainsi, on obtient : $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

4. Voir ci-après.