Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le résultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2080

Le but de cet exercice est d'établir des formules pour $\tan(a+b)$, $\tan(a-b)$ et $\tan(2a)$ ne faisant intervenir que $\tan(a)$ et $\tan(b)$.
On supposera dans tout l'exercice que les nombres a et b sont tels que $\tan(a+b)$, $\tan(a-b)$, $\tan(2a)$, $\tan(a)$ et $\tan(b)$ sont bien définis.

1. Rappelez la définition de $\tan(a)$ et $\tan(b)$.
2. Exprimez $\tan(a+b)$ en fonction de $\sin(a)$, $\sin(b)$, $\cos(a)$ et $\cos(b)$.
3. En remarquant que $\sin(a) = \tan(a)\cos(a)$ et $\sin(b) = \tan(b)\cos(b)$, et à l'aide d'une factorisation, exprimer alors $\tan(a+b)$ uniquement en fonction de $\tan(a)$ et $\tan(b)$.
4. Faire de même pour obtenir une formule donnant $\tan(a-b)$ uniquement en fonction de $\tan(a)$ et $\tan(b)$.
5. Exprimer ensuite $\tan(2a)$ uniquement en fonction de $\tan(a)$.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 2080

1. On a $\tan(a) = \dfrac{\sin(a)}{\cos(a)}$ et $\tan(b) = \dfrac{\sin(b)}{\cos(b)}$.
2. En utilisant les formules donnant $\sin(a+b)$ et $\cos(a+b)$ on obtient :

$$\begin{aligned}\tan(a+b) &= \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} \\ &= \frac{\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)}\end{aligned}$$

3. En poursuivant le calcul précédent :

$$\begin{aligned}\tan(a+b) &= \frac{\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)} \\ &= \frac{\tan(a)\cos(a)\cos(b)+\tan(b)\cos(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b)-\tan(a)\cos(a)\tan(b)\cos(b)} \\ &\quad \text{et en mettant en facteur } \cos(a)\cos(b) \text{ au numérateur et au dénominateur} \\ &= \frac{\cos(a)\cos(b)\,(\tan(a)+\tan(b))}{\cos(a)\cos(b)\,(1-\tan(a)\tan(b))} \\ &= \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}\end{aligned}$$

4. Sur le même prinicipe, on trouverait : $\qquad \tan(a-b) = \dfrac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$.
5. En écrivant $\tan(2a) = \tan(a+a)$, on trouvera : $\qquad \tan(2a) = \dfrac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 2370

Soient f et g les deux fonctions suivantes :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+1-(2x+1)\ln(x) \end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\ln(x)}{x^2+x} \end{array}\right.$$

dont on note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives dans un repère orthogonal du plan.

1. On considère $h : \begin{array}{|lcl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x + 2x\ln(x) + 1 \end{array}$.

a. Déterminer les variations de h sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. En déduire le signe de h sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. a. Déterminer les limites en 0 et en $+\infty$ de f.

b. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

c. En déduire le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

d. Justifier l'existence d'un unique réel α tel que $f(x) = 0$.

3. a. Déterminer les limites en 0 et en $+\infty$ de g.

b. Exprimer $g(\alpha)$ en fonction de α.

c. Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

d. En déduire le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}_+^*$.

e. Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 1.

4. Construire $\mathcal{C}_g$.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 2370

1. a. On a directement que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad h'(x) = 1 + 2\ln(x) + 2x \times \frac{1}{x} = 3 + 2\ln(x)$$

Ainsi, $h'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x) > -\dfrac{3}{2}$, c'est à dire $x > \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$ et $h'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$.

On en déduit le tableau de variations de h :

x	0		$\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$		$+\infty$
Signe de $h'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de h	‖	↘	$h\left(\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}\right) > 0$	↗	
Signe de $h(x)$	‖		$+$		

b. Comme $h\left(\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}\right) = \ldots = 1 - \dfrac{2}{\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}} > 0$, il vient que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $h(x) > 0$, d'où le signe de h.

2. a. Limite en 0 : en développant l'expression de f, il vient :

$$\underbrace{x+1}_{\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1} - 2\underbrace{x\ln(x)}_{\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0} - \underbrace{\ln(x)}_{\underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\infty} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\infty$$

Limite en $+\infty$: en factorisant l'expression de f par $(2x+1)$, il vient ;

$$\underbrace{(2x+1)}_{\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}\left(\underbrace{\frac{x+1}{2x+1}}_{=\frac{1+\frac{1}{x}}{2+\frac{1}{2x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}} - \underbrace{\ln(x)}_{\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}$$

$-\infty$

b. On trouve que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = 1 - 2 \times \ln(x) - \frac{2x+1}{x} = \frac{-x - 2x\ln(x) - 1}{x} = -\frac{h(x)}{x}$$

c. On en déduit ainsi :

x	0	α	$+\infty$
Signe de $h(x)$	‖	$+$	
Signe de $f'(x)$	‖	$-$	
Variations de f	‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$
Signe de $f(x)$	‖ $+$	0	$-$

d. La fonction f est telle que :
- f est continue sur $]0;+\infty[$
- f est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} = +\infty$ donc sont de signe opposées

donc par le théorème des valeurs intermédiaires dans le cas strictement monotone, on en déduit que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

3. a. Limite en 0 **:** il vient directement puisque $x^2+x>0$ sur $\mathbb{R}_+^*$:
$$\frac{\overbrace{\ln(x)}^{\xrightarrow[x\to 0]{}-\infty}}{\underbrace{x^2+x}_{\xrightarrow[x\to 0]{}0}} \xrightarrow[x\to 0]{} -\infty$$

Limite en $+\infty$ **:** en factorisant au numérateur par x^2, il vient :
$$\underbrace{\frac{\ln(x)}{x^2}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}0} \times \underbrace{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

b. Par définition $g(\alpha) = \dfrac{\ln(\alpha)}{\alpha^2+\alpha}$ et $f(\alpha)=0$. Or $f(\alpha) = \alpha+1-(2\alpha+1)\ln(\alpha)$ et ainsi $\ln(\alpha) = \dfrac{\alpha+1}{2\alpha+1}$. Par suite, il vient $g(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha(2\alpha+1)}$

c. On obtient :
$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad g'(x) &= \frac{\frac{1}{x}\times\left(x^2+x\right) - \ln(x)\times(2x+1)}{\left(x^2+x\right)^2}\\ &= \frac{x+1-(2x+1)\ln(x)}{\left(x^2+x\right)^2}\\ &= \frac{f(x)}{\left(x^2+x\right)^2}\end{aligned}$$

d. On en déduit donc directement que :

x	0	α	$+\infty$
Signe de $f(x)$	‖ $+$	0	$-$
Signe de $g'(x)$	‖ $+$	0	$-$
Variations de g	‖ $-\infty$ $\nearrow$	$g(\alpha)>0$	$\searrow$ 0

e. L'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 1 pour g est ainsi : $y = g'(1)(x-1)g(1)$.
Or $g'(1) = \dfrac{1}{2}$ et $g(1)=0$, et ainsi, on obtient : $\quad y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}$

4. Voir ci-après.