Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2298

Résoudre le système suivant à l'aide de son écriture matricielle :

$$\left\{\begin{array}{l} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 11 \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 10 \\ -3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5 = -16 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 3x_4 - x_5 = 5 \end{array}\right.$$

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 2298

On échelonne le système à l'aide de l'algorithme de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 & -1 & 11 \\ -2 & 1 & -4 & 3 & 2 & 10 \\ -3 & 2 & 3 & 1 & -2 & -16 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 3 & -1 & 5 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 1L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + \frac{3}{2}L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1}{2}L_1 \\ L_5 \leftarrow L_5 - 1L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 & -1 & 11 \\ 0 & -2 & -3 & 5 & 1 & 21 \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{9}{2} & 4 & -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{5}{2} & -\frac{9}{2} \\ 0 & 7 & -3 & 1 & 0 & -6 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{5}{4}L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + \frac{7}{4}L_2 \\ L_5 \leftarrow L_5 + \frac{7}{2}L_2}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 & -1 & 11 \\ 0 & -2 & -3 & 5 & 1 & 21 \\ 0 & 0 & \frac{33}{4} & -\frac{9}{4} & -\frac{19}{4} & -\frac{103}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{27}{4} & \frac{39}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{129}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{27}{2} & \frac{37}{2} & \frac{7}{2} & \frac{135}{2} \end{array}\right) \underset{\substack{L_4 \leftarrow L_4 + \frac{9}{11}L_3 \\ L_5 \leftarrow L_5 + \frac{18}{11}L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 & -1 & 11 \\ 0 & -2 & -3 & 5 & 1 & 21 \\ 0 & 0 & \frac{33}{4} & -\frac{9}{4} & -\frac{19}{4} & -\frac{103}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{87}{11} & -\frac{51}{11} & \frac{123}{11} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{163}{11} & -\frac{47}{11} & \frac{279}{11} \end{array}\right)$$

$$\underset{L_5 \leftarrow L_5 - \frac{163}{87}L_4}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 & -1 & 11 \\ 0 & -2 & -3 & 5 & 1 & 21 \\ 0 & 0 & \frac{33}{4} & -\frac{9}{4} & -\frac{19}{4} & -\frac{103}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{87}{11} & -\frac{51}{11} & \frac{123}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{128}{29} & \frac{128}{29} \end{array}\right) \underset{\substack{L_4 \leftarrow L_4 + \frac{1479}{1408}L_5 \\ L_3 \leftarrow L_3 + \frac{551}{512}L_5 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{29}{128}L_5 \\ L_1 \leftarrow L_1 + \frac{29}{128}L_5}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 & 0 & 12 \\ 0 & -2 & -3 & 5 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & \frac{33}{4} & -\frac{9}{4} & 0 & -21 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{87}{11} & 0 & \frac{174}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{128}{29} & \frac{128}{29} \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + \frac{33}{116}L_4 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{55}{87}L_4 \\ L_1 \leftarrow L_1 - \frac{22}{87}L_4}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & -2 & -3 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & \frac{33}{4} & 0 & 0 & -\frac{33}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{87}{11} & 0 & \frac{174}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{128}{29} & \frac{128}{29} \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + \frac{4}{11}L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - \frac{4}{33}L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{33}{4} & 0 & 0 & -\frac{33}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{87}{11} & 0 & \frac{174}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{128}{29} & \frac{128}{29} \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{3}{2}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{33}{4} & 0 & 0 & -\frac{33}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{87}{11} & 0 & \frac{174}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{128}{29} & \frac{128}{29} \end{array}\right) \underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{4}{33}L_3 \\ L_4 \leftarrow \frac{11}{87}L_4 \\ L_5 \leftarrow \frac{29}{128}L_5}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

En notant x_1, …, x_5 les inconnues du système, on en déduit les relations :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & 2 \\ x_2 & = & -2 \\ x_3 & = & -2 \\ x_4 & = & 2 \\ x_5 & = & 1 \end{array}\right.$$

EX. 2 | Réf. 2299

Soient $f:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{2}\end{array}\right.$ et $g:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\end{array}\right.$.

On remarquera que l'étude de g a déjà été faite dans un devoir précédent et on pourra réutiliser, en les rappelant, les résultats établis dans ce devoir.

1. **Préliminaire :** montrer que $\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$.
2. Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et admet une fonction réciproque g^{-1}.
3. Justifier que f et g sont réciproques l'une de l'autre.
4. Résoudre l'équation $f(x)=1$.
5. Sans utiliser l'expression de $g'(x)$, déterminer la valeur de $g'(1)$.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 2299

1. On utilise la relation $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ pour transformer le dénominateur :
$$\begin{aligned}\frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} &= \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)}{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$
2. La fonction g est telle que :
   - g est continue sur $\mathbb{R}$;
   - g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$;
   - $g\left(]-\infty;\infty[\right)=]-\infty;\infty[$

   Donc g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et admet ainsi une fonction réciproque g^{-1}, définie sur $\mathbb{R}$ et à valeur dans $\mathbb{R}$.
3. Pour tout $x\in\mathbb{R}$:
$$\begin{aligned}f(g(x)) &= \frac{\mathrm{e}^{g(x)}-\mathrm{e}^{-g(x)}}{2} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}-\mathrm{e}^{-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}}{2} \\ &= \frac{x+\sqrt{x^2+1}-\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}}{2} \\ &= \frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2-1}{2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)} \\ &= \frac{2x^2+2x\sqrt{x^2+1}}{2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)} \\ &= \frac{2x\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)} \\ &= x\end{aligned}$$
   et ainsi $f=g^{-1}$.
4. $$\begin{aligned}f(x)=1 &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}=2 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{x}\left(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}\right)=\mathrm{e}^{x}\times 2 \\ &\quad\text{puisque : } \forall x\in\mathbb{R}, \mathrm{e}^{x}>0 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x}-2\mathrm{e}^{x}-1=0 \\ &\Leftrightarrow X^2-2\mathrm{e}^{x}-1=0 \text{ en posant } X=\mathrm{e}^{x}\end{aligned}$$
   La résolution de l'équation $X^2-2X-1=0$ conduit à deux solutions $X_1=1+\sqrt{2}$ et $X_2=1-\sqrt{2}$.
   On résout alors les deux équations $\mathrm{e}^{x}=1+\sqrt{2}$ et $\mathrm{e}^{x}=1-\sqrt{2}$, où seule la première a une solution qui est $x=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.
   Par suite, l'équation $f(x)=1$ admet une unique solution, qui est $\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.
5. D'après la formule liant la dérivée d'une fonction et celle de sa réciproque, il vient : $\forall x\in\mathbb{R},\quad g'(1)=\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(1)\right)}$.
   Or : $f(x)=1 \Leftrightarrow f^{-1}(f(x))=f^{-1}(1) \Leftrightarrow x=f^{-1}(1)$. De la résolution de $f(x)=1$, on en déduit donc que $\ln\left(1+\sqrt{2}\right)=f^{-1}(1)$.
   Par, ailleurs, pour tout $x\in\mathbb{R}$, il vient $f'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}{2}$.
   Par conséquent :
$$\begin{aligned}g'(1) &= \frac{1}{\dfrac{\mathrm{e}^{f^{-1}(1)}+\mathrm{e}^{-f^{-1}(1)}}{2}} \\ &= \frac{1}{\dfrac{\mathrm{e}^{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}+\mathrm{e}^{-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}}{2}} \\ &= \frac{1}{\dfrac{1+\sqrt{2}+\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}}{2}} \\ &= \frac{1}{\dfrac{\left(1+\sqrt{2}\right)^2+1}{2\left(1+\sqrt{2}\right)}} \\ &= \frac{1}{\dfrac{4+2\sqrt{2}}{2\left(1+\sqrt{2}\right)}} \\ &= \frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 2297

L'intensite $I(\lambda)$ du rayonnement d'une étoile pour une longueur d'onde λ ($\lambda > 0$) est donnée par :

$$I(\lambda) = \frac{1}{\lambda^5}\mathrm{e}^{-\frac{K}{\lambda}}$$

où K est une constante positive qui dépend de l'étoile.

1. Démontrer que l'intensité $I(\lambda)$ rayonnée par l'étoile est maximale pour une valeur λ_0 de λ que l'on déterminera en fonction de la constante K.
2. Déduisez-en $I(\lambda_0)$.

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 2297

1. - **Calcul de $I'(\lambda)$:** pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $I'(\lambda) = \mathrm{e}^{-\frac{K}{\lambda}}\dfrac{-5\lambda + K}{\lambda^7}$.
   - **Étude du signe de $I'(\lambda)$:** puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-\frac{K}{x}} > 0$, et comme pour tout $x > 0$, $\dfrac{1}{x^7} > 0$, il suffit d'étudier le signe de $-5\lambda + K$ pour en déduire le signe de $I'(\lambda)$.
   - Il est inutile ici de chercher les limites en 0 et en $+\infty$ de I de part la question qui nous est posée. Le tableau de variation permet d'y répondre, dans avoir à faire plus.

   Ainsi, I présente un maximum pour $\lambda = \dfrac{K}{5}$.
2. On calcule donc $I\left(\dfrac{K}{5}\right)$, et on obtient $I\left(\dfrac{K}{5}\right) = \dfrac{3215}{K^5\mathrm{e}^5}$.

λ	0		$\frac{K}{5}$		$+\infty$
Signe de $-5\lambda + K$		$+$	0	$-$	
Signe de $I'(\lambda)$	||	$+$	0	$-$	
Variations de I	||	$\nearrow$	$I\left(\frac{K}{5}\right)$	$\searrow$	